IV－6　鋼管杭の鉛直方向複素復元力の特性

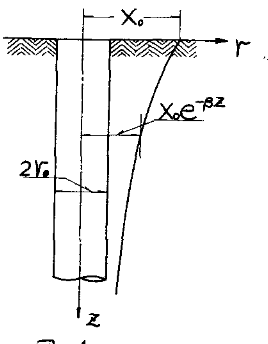
九州大学　正員　小坪清真
同大学院　学生員○荒牧軍治

1。まえがき

上部構造物の地震時における挙動を動的に解析するには、上部構造物が地盤および基礎構造物からうける反力の動的性質（複素復元力）を明らかにしなければならない。半無限弾性体盤上にある構造物が鉛直方向振動をする場合の地盤の複素復元力については，山本，鳥海氏等の弾性論的取り扱いや、他に種々の実験的研究があり，その性質もある程度明らかにされている。しかし，杭や井筒のような地中構造物が周面地盤からうける反力の動的性質については，まだ、十分な解明がなされていない。

実際の杭基礎においては、杭の振動によって土が動き，土が動くことによって杭の振動に影響を及ぼすという連成振動を考えなければならないが、これは非常に複雑となるので、ここでは，先ず，杭の振動変形を与えて地盤の複素復元力を求め、その値を杭の縦振動の式に入れるという近似法を用いた。杭の縦振動に対しては二種の反力がある。一つは周面地盤からうける反力であり，一つは，杭先の地盤からうける反力である。このうち，杭先からうける反力については，半無限弾性体表面の鉛直交番荷重に対する鳥海氏等の弾性論をそのまま適用し，周面地盤からの反力については，新たに弾性波動論を用いて複素復元力を求めた。これらの二種の反力を用いて杭の縦振動を解き、杭頭の複素復元力を求めた。

2。杭周面地盤からの複素復元力の理論



図－1

半無限弾性体の縦方向の微分方程式は、Z軸まわりの対称性を考えて次のように表わされる。uはr方向の変位，wはZ方向の変位である。

$$\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta}{\partial r}+\frac{\partial^2\Delta}{\partial z^2}\right) \quad ①$$

$$\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=\mu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{\omega}{r^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\right) \quad ②$$

但し　γ：地盤の単位体積重量，λ，μ　地盤の弾性定数（Lamé の定数）

$$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)+\frac{\partial w}{\partial z} \quad ③$$

$$\omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial r}\right) \quad ④$$

$r=\infty$，すなわちr方向に前進波のみで後進波はないと考えられるので，①，②式の解は次のように表わされる。

$$\Delta=A_1H_{2,0}(k_1r_0)e^{-nz+ipt} \quad ⑤$$

$$\omega=A_2H_{2,1}(k_2r_0)e^{-nz+ipt} \quad ⑥$$

但し　$k_1^2=\dfrac{\gamma p^2}{g(\lambda+2\mu)}+n^2$　⑦　　$k_2^2=\dfrac{\gamma p^2}{g\mu}+n^2$　⑧

⑤，⑥式を③，④式に代入して，u，wを求めると，

$$u=\left\{-B_1\frac{\partial H_{2,0}(k_1r)}{\partial r}+nB_2H_{2,1}(k_2r)\right\}e^{-nz+ipt} \quad ⑨$$

$$w=\left[nB_1H_{2\cdot0}(k_1r_0)+B_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\{rH_{2\cdot1}(k_2r)\}\right]e^{-nz+ipt} \qquad ⑩$$

このほかに、同次方程式の一般解として　$u=H_{2\cdot0}(nr)\times$定数，$w=H_{2\cdot1}(nr)\times$定数　があるが、これを③，④式に代入して求めたΔ，ωが⑤，⑥式で与えられるΔ，ωに等しくならなければならないことから，この解は存在し得ないことがただちに知られる。復元力を求めるには変位を与えそれによってひきおこされる地盤の反力を求めるのであるから変位を次のような形で与える。すなわち$r=r_0$において，$u_0=0$，$w_0=X_0e^{-\beta z+ipt}$　境界条件を⑨，⑩式に入れてB_1，B_2を求める。

$$B_1=\frac{D_1}{D_*},\quad B_2=\frac{D_2}{D_*} \qquad ⑪$$

$$\left.\begin{aligned}D_1&=-X_0\beta H_{2\cdot1}(k_2r_0)\\D_2&=X_0k_1H_{2\cdot1}(k_1r_0)\\D_*&=k_1k_2H_{2\cdot1}(k_1r_0)H_{2\cdot0}(k_2r_0)-\beta^2H_{2\cdot0}(k_1r_0)H_{2\cdot1}(k_2r_0)\end{aligned}\right\} ⑫$$

地盤が杭に及ぼす復元力は次のような式で表わされる。

$$P=-\mu\pi D\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=r_0}=\frac{X_0\mu\pi Dk_1(k_2^2-\beta^2)}{D_*}H_{2\cdot1}(k_1r_0)H_{2\cdot1}(k_2r_0)$$

$$=X_0(R+iI)e^{-\beta z+ipt} \qquad ⑬$$

P：単位長さ当りの杭のうける反力（kg/cm）

R：土の抵抗力（杭変位と同一位相）

I：土の抵抗力（杭変位と90°の位相差　減衰）

Pは3つの無次元量，βr_0，k_1r_0，k_2r_0によって表わされている。しかし$\lambda=\mu$とすると3つのうち2つきまれば残りの1つは次の関係式より求めることが出来る。

$$3(k_1r_0)^2-(k_2r_0)^2=2(\beta r_0)^2 \qquad ⑭$$

ゆえに最初に与える杭変位の形を実験値その他の方法で代入してやればk_1r_0，k_2r_0どちらかの無次元量で復元力の性質を調べることができる。又⑬式より明らかなごとく復元力Pは境界条件で与えた変位w_0に比例する力である。

$$R=C_PM_1 \qquad I=-C_PM_2$$

$$C_P=\frac{K'}{N_1^2+N_2^2}$$

$$K'=2\mu\pi k_1r_0\{(k_2r_0)^2-(\beta r_0)^2\}$$

$$M_1=S_5N_1+S_6N_2$$

$$M_2=S_6N_1-S_5N_2$$

$$N_1=k_1r_0\cdot k_2r_0S_1-(\beta r_0)^2S_3$$

$$N_2=k_1r_0\cdot k_2r_0S_2-(\beta r_0)^2S_4$$

$$S_1=J_1(k_1r_0)J_0(k_2r_0)+Y_1(k_1r_0)Y_0(k_2r_0)$$

$$S_2=Y_1(k_1r_0)J_0(k_2r_0)+J_1(k_1r_0)Y_0(k_2r_0)$$

$$S_3=J_0(k_1r_0)J_1(k_2r_0)-Y_0(k_1r_0)Y_1(k_2r_0)$$

$$S_4=Y_0(k_1r_0)J_1(k_2r_0)+J_0(k_1r_0)Y_1(k_2r_0)$$

$$S_5=J_1(k_1r_0)J_1(k_2r_0)-Y_1(k_1r_0)Y_1(k_2r_0)$$

$$S_6=Y_1(k_1r_0)J_1(k_2r_0)+J_1(k_1r_0)Y_1(k_2r_0)$$

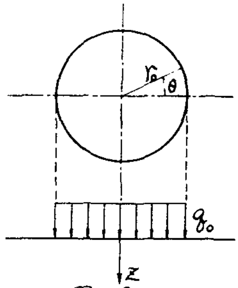
$J_0(z)$，$Y_0(z)$：0階のベッセル函数

$J_1(z)$，$Y_1(z)$：1階のベッセル函数

3。杭先地盤の複素復元力

杭先においては、コンクリート杭においてはもちろん，鋼管杭においても鋼管内にある土の影響で，鋼管の直径Dの全断面積に土から反力をうけると考えてよい。地中にある杭先と地表面にある円盤の挙動は当然異るはずであるが，ここでは近似的に，地表に円形の交番等分布荷重が作用した場合の鳥海氏の弾性解を用いることにする。鉛直外力をQ_vとすれば中央点の変位は次のように与えられる。

$$w=\frac{Q_v e^{ipt}}{\mu\pi r_0}\int_0^\infty \frac{\alpha j^2}{F(k)}J_1(kr_0)\,dk$$
$$=\frac{Q_v}{\mu\pi r_0}(f_1+if_2) \qquad (15)$$



図－2

複素復元力は次の式で与えられる。

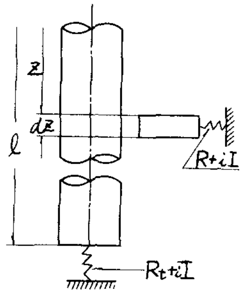
$$P_v=\frac{-\mu\pi r_0}{f_1^2+f_2^2}(f_1-if_2)\,w$$
$$=(R_t+I_t)\,w \qquad (16)$$

但し
$$R_t=-\frac{\mu\pi r_0}{f_1^2+f_2^2}f_1,\qquad I_t=+\frac{\mu\pi r_0}{f_1^2+f_2^2}f_2 \qquad (17)$$

$\lambda=\mu$ の時の $a_0=pr_0\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$ に関する f_1, f_2 の値が表で与えられている。

4。杭頭複素復元力

杭の縦振動の微分方程式は2で求めた周面の地盤からの複素復元力 R, I を用いて次のように表わせる。



図－3

$$EA\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}=\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+(R+iI)\,w_0 \qquad (18)$$

ここにE：杭の弾性定数，A：杭の断面積，γ 杭の単位体積重量，今定常振動を考えて $w_0=W_0e^{ipt}$ とすると ⑱式は．

$$\frac{d^2W_0}{dz^2}+\left(\frac{\gamma p^2}{Eg}-\frac{R+iI}{EA}\right)W_0=0 \qquad (19)$$

$$\alpha^2=\frac{\gamma p^2}{Eg}-\frac{R+iI}{EA} \qquad (20)$$ とすると，

$$\frac{d^2W_0}{dz^2}+\alpha^2W_0=0 \qquad (21)$$

㉑式の一般解は次のように表わされる。

$$W_0=A_1\cos\alpha z+A_2\sin\alpha z \qquad (22)$$

復元力を求めるのが目的なので杭頭において定常変位 Z_0e^{ipt} を与え $z=l$ すなわち杭先端においては R_t, I_t を用いて弾性支持とすれば境界条件は次のように表わされる。

$$z=0\ ;\qquad w_0=Z_0e^{ipt}$$
$$z=l\ ;\qquad EA\frac{\partial w_0}{\partial z}=-(R_t+I_t)\,w_0 \qquad (23)$$

㉓式より定数 A_1, A_2 は次のごとくなる。

$$A_1=Z_0$$
$$A_2=\frac{EA\alpha\sin\alpha l-(R_t+iI_t)\cos\alpha l}{EA\alpha\cos\alpha l+(R_t+iI_t)\sin\alpha l}Z_0 \qquad (24)$$

杭頭複素復元力は次の式で示される

$$EA\left(\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)$$

$z=0$ を代入し，杭頭複素復元力を P_h とすると

$$P_h=EA\alpha\frac{EA\alpha\sin\alpha l-(R_t+iI_t)\cos\alpha l}{EA\alpha\cos\alpha l+(R_t+iI_t)\sin\alpha l}Z_0e^{ipt}$$

$$P_h=(R_h+I_h)Z_0e^{ipt}$$
$$R_h=EA(Mm_1-Nm_2)$$
$$I_h=EA(Mm_2+Nm_1)$$
$$m_1=\frac{a_1a_3+a_2a_4}{a_3^2+a_4^2}$$
$$m_2=\frac{a_2a_3-a_1a_4}{a_3^2+a_4^2}$$
$$a_1=EA(Ml_1-Nl_2)-(R_tj_1+I_tj_2)$$
$$a_2=EA(Nl_1+Ml_2)-(I_tj_1-R_tj_2)$$
$$a_3=EA(Mj_1+Nj_2)+(R_tl_1-I_tl_2)$$
$$a_4=EA(Nj_1-Mj_2)+(I_tl_1+R_tl_2)$$
$$j_1=\cos Ml\cosh Nl$$
$$j_2=\sin Ml\sinh Nl$$
$$l_1=\sin Ml\cosh Nl$$
$$l_2=\cos Ml\sinh Nl$$
$$M=\sqrt[4]{J^2+K^2}\cos\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\frac{K}{J}+2k\pi\right)$$
$$N=\sqrt[4]{J^2+K^2}\sin\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\frac{K}{J}+2k\pi\right)$$
$$J=\frac{\gamma Ap^2-gR}{EAg}\qquad K=\frac{-I}{EA}$$

5. 数値計算例

周面の複素復元力R, I を求めるには杭変形の無次元量 hr_0 を定めなければならない。この値を求めるために、博多港で行われた垂直載荷試験のデータより歪量を積分して求めた杭変位の形を用いた。この試験は静的なものであるが、縦方向振動の共振点は十分大きい振動数のところにあるのでこれを杭変位の形とおいても差しつかえないと思われる。又計算に用いた、杭及びまわりの地盤の諸定数は博多港において試験に用いられた杭及びそのまわりの値をそのまゝ用いた。周面複素復元力 R, I は図-5 に無次元量 hr_0 をパラメーターとして表わした。杭変位と同一位相のRは振動数が高くなってもそれ程変化せず、ほゞ一定とみなしてさしつかえないが、減衰を示すIは振動数に対してほゞ1次的に比例するとみなせる。杭頭複素復元力は図-6 に示すように R_h, I_h ともに、周波数に対してそれ程大きな変化を示さないことが分る。数値計算に用いた諸元は表-1の通りである。

$\lambda = \mu = 80$ kg/cm²	
$D = 2r_0 = 70$ cm	$l = 10$ m
$\gamma = 7.8 \times 10^{-3}$ kg/cm³	
$t = 1.1$ cm (鋼厚)	
$\beta r_0 = 5.25 \times 10^{-2}$	

表-1

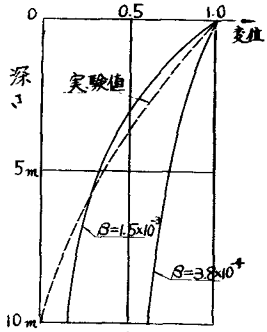


図-4

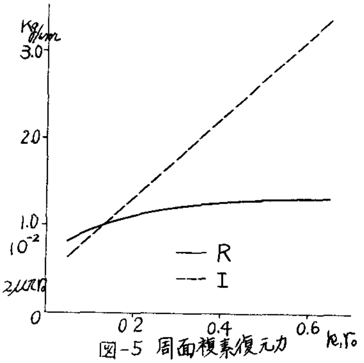


図-5 周面複素復元力

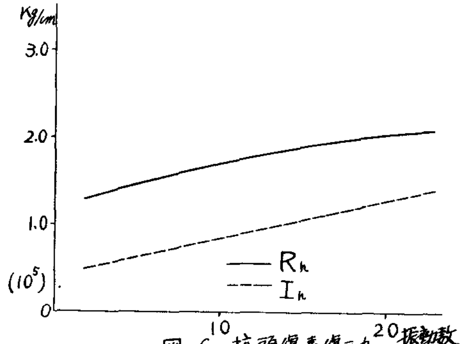


図-6 杭頭復素復元力

6. 結語

本研究においては杭変形を仮定して、それに基いて計算を行っている。これは杭と地盤とを別々に考えて解いたためである。厳密には杭と地盤との連成振動として解かねばならない。又地盤の弾性定数その他、あまり実測されていない定数を用いているので実際に現場実験等を行い、確かめてみる必要があると思われる。

参考文献

山本鎮男　日本建築学会論文報告集　S.42.1　オ131号「杭のある構造物のロッキング振動(その四)」

Isao Toriumi:　Technology Report of Osaka Univ　Vol 5, No 146　1955
「Vibration in Foundation of Machines」