

■-15 河床砂粒の運動機構に因する研究(第1報)

— 滑面水路における移動速度 —

九州大学工学部 正員 林 康一郎

○ 4 野原 久

1. 緒言

河床上を漂流する砂粒の移動速度は、その単位面積上の移動砂の数に漂流速度を乗じ、基本的傾向があるだけでなく、流水中の砂粒の挙動を解明することによって砂粒に作用する流体力を推定評価する手掛かりを与える。また、最近、鉱山、製造工場、建設業などで固体を流水によって運搬する「水力輸送」が利用されるようになってきており、この方面からも流水中の固体の運動機構が問題になっている。これらの研究の第一歩として、我々は滑面水路における各種形状の固体の移動速度について実験を行ない、若干の考察を試みた。

2. 実験装置および方法

巾40cm、有効長12mの鋼製(片面アクリライト)可変勾配水路に水を流し、その中に供試体を投入してその移動速度をストップウォッチで測定した。同時に、水深方向の流速分布をピトー管で、水面形をポイントゲージで測定した。また、供試体の水中での動摩擦係数を測定するために15×20×400cmのアクリライト水槽を傾斜させて中に水を貯め、その中で供試体を滑動または転動させてその移動速度を測定した。実験に使用した供試体は表-1のとおりである。

表-1 供試体の諸元

形 状	材 質	比 重	寸 法
正六面体	鉄	7.86	3×3×3cm, 2×2×2, 1×1×1
"	ジュラルミン	2.70	同 上
直方体	鉄	7.86	2×2×1, 2×2×0.5
"	ジュラルミン	2.70	同 上
球	鉄	7.86	径 2.54, 1.90, 1.27, 0.79
"	ガラス	2.50	径 2.44, 1.64, 1.27
玉石	石	2.40~2.75	nominal diameter 1.12~2.69
碎石	石	2.69~2.93	" 1.28~2.78

3. 動摩擦係数と抗力係数

(1) 正六面体

正六面体が静水中の斜面を滑り落ちる場合、供試体の移動速度を u_g 、水の抵抗力を D 、抗力係数を C_D 、揚力を L 、揚力係数を C_L 、供試体の水中重量を W' 、正六面体の一辺の長さを a 、水および供試体の密度をそれぞれ ρ および ρ' 、供試体と斜面の間の摩擦力を F 、水中動摩擦係数を μ' 、斜面の傾斜角を θ とすると、 $W' = (\sigma - \rho) g a^3$ 、 $D = \frac{\rho}{2} C_D a^2 u_g^2$ 、 $L = \frac{\rho}{2} C_L a^2 u_g^2$ 、 $F = \mu' (W' \cos \theta - L)$ より、供試体の運動方程式は、

$$(\sigma + \frac{1}{2} \rho) a^3 \frac{du_g}{dt} = W' \sin \theta - D - F \quad \text{故に} \quad \frac{du_g}{dt} = \frac{sg(\sin \theta - \mu' \cos \theta)}{\sigma \rho + \frac{1}{2}} - \frac{C_D - \mu' C_L}{2a(\sigma \rho + \frac{1}{2})} u_g^2$$

ここに、 σ は供試体の水中比重である。上式を $t=0$ で $u_g=0$ として積分すると

$$\frac{u_g^2}{sga} = \frac{2(\sin \theta - \mu' \cos \theta)}{C_D - \mu' C_L} \left\{ \tanh \left(\frac{\sqrt{C_D - \mu' C_L}}{\sigma \rho + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{sg}{2a}} t \right) \right\}^2 \quad \text{①}$$

となる。後述のように $C_D - \mu' C_L \approx 1.0$ であるから、 $\sigma \rho = 7.86$ 、 $a = 3 \text{ cm}$ 、 $t = 1 \text{ sec}$ とすると、 $\tanh \left(\frac{\sqrt{C_D - \mu' C_L}}{\sigma \rho + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{sg}{2a}} t \right) = 0.9997$ となり、移動速度は1秒程度で定常状態になっている。従って、以下の考察は定常状態について行う。

定常状態では

$$\frac{u_g^2}{sg \cos \theta} = \frac{2(\tan \theta - \mu')}{C_D - \mu' C_L} \quad (2)$$

C_D, C_L, μ' は const. と考えられるので、 $u_g^2/sg \cos \theta$ と $\tan \theta$ は直線関係にある。実験値より $u_g^2/sg \cos \theta$ と $\tan \theta$ を計算してプロットし、最小自乗法で μ' を求めると、鉄で $\mu' = 0.41$ 、ジュラルミンで $\mu' = 0.37$ となる。また、この μ' を用いて $C_D - \mu' C_L$ を逆算する。

と、図-1 のようになり、球の場合と異なりレイノルズ数に無関係で、 $C_D - \mu' C_L \approx 1.0$ となる。 C_D として正方形の板の抗力係数 $C_D = 1.16$ を用いると $C_L \approx 0.4$ となり、かたりの揚力かたっていることがわかる。

(2) 球

球の場合には D, L の他に Magnus 効果かたらく。無限に長い円柱の Magnus 効果は $\pi \rho d^2 u_g^2$ であるから球に対する補正係数 m を用いて $M = m \pi \rho d^2 u_g^2$ とし、 $F = \mu (W \cos \theta - L + M)$ より、

$$\frac{u_g}{sg \cos \theta} = \frac{4}{3} \frac{\tan \theta - \mu'}{C_D - \mu' C_L + 8 \mu' m} \quad (3)$$

となる。 C_D は $Re = u_g d / \nu$ によって変化するが、実験の範囲では $Re = 10^3 \sim 10^4$ 程度で、かつ、同一種の球の Re の範囲は更に狭いから、同一の球に対しては③式の右辺の分母は一定とみなしてよい。そこで、実験値より $u_g^2/sg \cos \theta$ と $\tan \theta$ を求めた後、最小自乗法で μ' を求めると、 $\mu' \approx 0.04$ 程度になる。求めた μ' を用いて③式の関係より各実験値における $(C_D - \mu' C_L + 8 \mu' m)$ を計算し $Re = u_g d / \nu$ に対してプロットすると図-2 のようになる。 $(C_D - \mu' C_L + 8 \mu' m)$ は Re によって変化しているが、球径や比重による差異は認められない。図中に静水中を沈降する球の抗力係数 C_D を実線で記入しているが、 $(C_D - \mu' C_L + 8 \mu' m)$ はそれよりやや大きくなっている。次に、これを玉石の実験結果と比較してみる。玉石の μ' は $0.18 \sim 0.35$ の範囲で球の $\mu' \approx 0.04$ よりかなり大きく、また $(C_D - \mu' C_L + 8 \mu' m)$ は図-3 に示すように球のそれより大きいものが多いが、いくつかの玉石では球のそれとほぼ一致している。このように、球と玉石とで μ' の値が大きく異なるにもかかわらずいくつかの玉石の $C_D - \mu' C_L + 8 \mu' m$ の値が球のそれと一致するということは、揚力や Magnus 効果の影響が小さいか又は $C_L \approx 8m$ であることを暗示する。

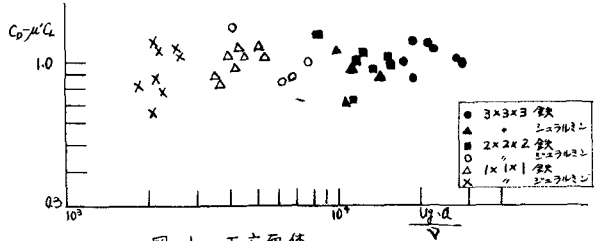


図-1 正六角体

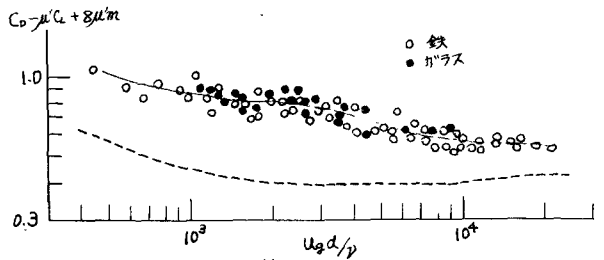


図-2 球

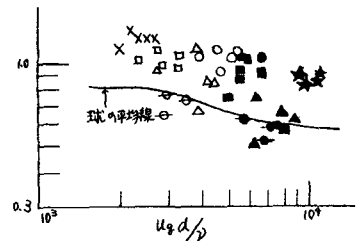


図-3 玉石

4. 流水中の固体の移動速度

(1) 正六面体

定常状態での力の釣り合いは $D + W' \sin \theta = \mu'(W' \cos \theta - L)$ であるから、 $u_g = 0$ のとき流速を u_c 、 $\varphi' = u_g/u$ 、 $\varphi'_c = u_{gc}/u_c$ とおくと、 $u_g/u = 1 - u_c/u = 1 - \varphi'_c u_c/\varphi u_g$ とする。 $\varphi' = \varphi'_c$ とすると、

$$\frac{u_g}{u} = 1 - \sqrt{\frac{\varphi'_c}{\varphi}} \quad (4) \quad \text{ここに } \varphi = \frac{u_*^2}{5ga}, \quad \varphi'_c = \frac{u_{*c}^2}{5ga}$$

φ_c は $\cos \theta$ と考えられるので u_g/u は $1/\sqrt{\varphi}$ と直線関係になる。実験値より u_g/u と $1/\sqrt{\varphi}$ を求めたプロット、すると図-4 のようになり、 $u_g/u < 0.5$ の範囲で

は実験値が $u_g/u = 1 - \sqrt{0.0021/\varphi}$ のまわりにちがはってあり④式が成立しているとみてよい。また、 $\varphi'_c = 0.0021$ となり、流砂の $\varphi_c \approx 0.05$ よりずっと小さい。しかし、 u_g/u が 0.5 をこえると、実験値は上記の直線より大きく上方にはずれており、④式が適用できなくなる。これは u_g/u が大きくなると供試体と水路床の間にうすい water film ができて摩擦抵抗が減少するためであると思われる。そこで、このような場合の固体の運動を潤滑面の理論を用いて検討してみる。

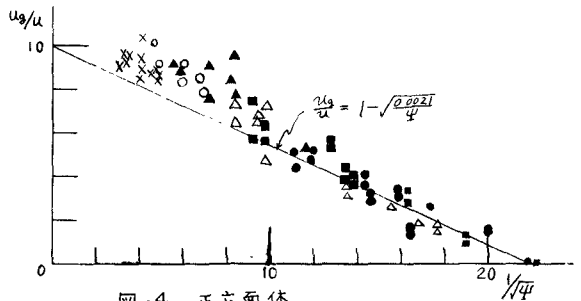
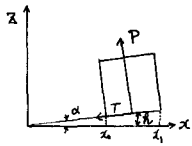


図-4 正六面体



左図のように x, y, z 軸を供試体に固定して考えると供試体が静止し水路床が $-u_g$ の速度で移動することになる。次に、i) すき間は非常に小さいので Re が小さく、慣性項は無視できる。ii) $u \gg v$, $u \gg w$ iii) すき間は平行に近いので $\partial u/\partial z \gg \partial u/\partial x$ と仮定すると、Navier-Stokes の方程式は簡単に $\partial p/\partial x = \mu \partial^2 u/\partial z^2$ となる。これを積分して境界条件 $z=0$ で $u = -u_g$, $z=h$ で $u=0$, $x=x_0$ および $x=x_1$ で $p=p_0$ を用いて供試体の底面に沿う圧力 P を求めると、

$$P = \frac{6\mu u_g d^3}{(n-1)^2 R_0^2} \left(\log n - 2 \frac{n-1}{n+1} \right) \quad (5)$$

$$\text{ここに、} R_0 = \alpha x_0, \quad R_1/R_0 = x_1/x_0 = n$$

また供試体の底面の抵抗は $\tau = \mu (\partial u/\partial z)_{x=h}$ を積分して

$$\tau = \frac{\mu u_g d^2}{\alpha} \left(6 \frac{1-n}{1+n} - 2 \log n \right) \quad (6)$$

x 方向および z 方向の力の釣り合いより、 $P \cos \alpha = W' \cos \theta$,

$T \cos \alpha + D = 0$ であるから、 $\cos \alpha = \cos \theta = 1$ とおくと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_g}{u} &= \frac{1}{1 + K \left(\frac{5ga}{u_*^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \\ K &= \left[\frac{4}{6\sqrt{6}} \frac{3\frac{n-1}{1+n} + \log n}{\log n - 2\frac{n-1}{n+1}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

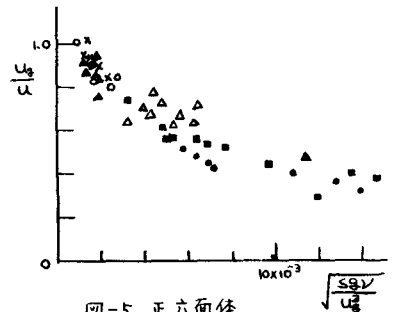


図-5 正六面体

直方体も正六面体と同様で、 $u_g/u > 0.5$ になると u_g/u の値は $u_g/u = 1 - u_c/u$ の線から上へはなれる。(図-6参照)。この部分に対して⑦式のパラメータ $\sqrt{sgd/u^3}$ でプロットすると図-7のようになる。

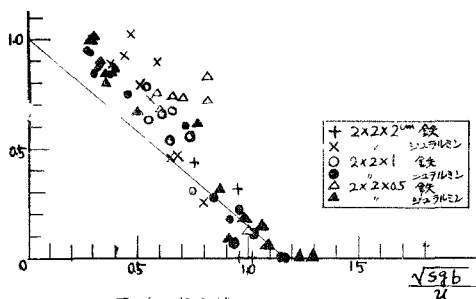


図-6 直方体

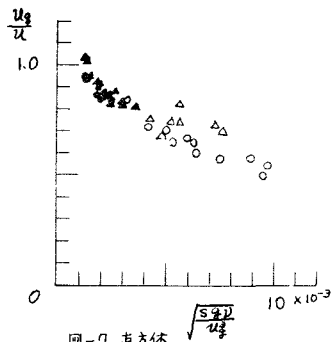


図-7 直方体

(2) 球

流水の抵抗力 D 、揚力 L 、Magnus効果 M は u と u_g の大小関係により向きが異なる。また、流速は水深方向に変化するから球に作用する相対速度 $(u - u_g)$ も変化する。一般には右図のように球の上部と下部で向きが逆になる。そこで、 D, L, M に対する代表流速をそれぞれ u_0, u_L, u_M とし、力の向きを考慮して $D = \frac{\rho}{2} C_D \pi d^2 (u_0 - u_g) |u_0 - u_g|$, $L = \frac{\rho}{2} C_L \pi d^2 (u_L - u_g) |u_L - u_g|$, $M = m \rho \pi d^2 u_g (u_M - u_g)$ とする。定常状態では $D + W \sin \theta = \mu' (W' \cos \theta - L - M)$ から、

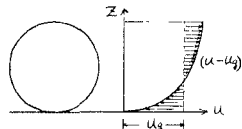


図-8 相対速度

$$\frac{(u_0 - u_g) |u_0 - u_g|}{sgd} = \frac{4}{3C_D} (\mu' \cos \theta - \sin \theta) - \mu' \frac{C_L}{C_D} \frac{(u_L - u_g) |u_L - u_g|}{sgd} - 8 \mu' \frac{m}{C_D} \frac{u_g (u_M - u_g)}{sgd}$$

$u_L, u_M \leq 1$ と u の変の流速をとればよいかは不明であるが、 $u_0 = u$, $u_L = u_M = k u$ とすると、

$u > u_g$ の場合

$$\frac{u_g}{u} = 1 - \frac{\sqrt{\frac{4}{3C_D} (\mu' \cos \theta - \sin \theta) \frac{sgd}{u^2} - (k - \frac{u_g}{u}) \left\{ \mu' \frac{C_L}{C_D} k - \frac{u_g}{u} + 8 \mu' \frac{m}{C_D} \frac{u_g}{u} \right\}}}{1} \quad (8)$$

とすると、上式によると、 u_g/u は $L = M = 0$ の場合 $u_g/u = 1 - \frac{\sqrt{\frac{4}{3C_D} (\mu' \cos \theta - \sin \theta) \frac{sgd}{u^2}}}{1}$ に較べて $k - u_g/u < 0$ のとき小さく、 $k - u_g/u > 0$ のとき大きくはなるが、これは L, M の向きから $k - u_g/u < 0$ のとき下向き、 $k - u_g/u > 0$ のとき上向きになるためである。実験値より u_g/u と $\sqrt{\frac{4}{3C_D} (\mu' \cos \theta - \sin \theta) \frac{sgd}{u^2}}$ を求めてプロットすると図-9のようになり、 $u_g/u \approx 0.8$ を境にして実験値は $u_g/u = 1 - \frac{\sqrt{\frac{4}{3C_D} (\mu' \cos \theta - \sin \theta) \frac{sgd}{u^2}}}{1}$ の線の上下に分れている。これより $u_g/u \approx 0.8$ で $k - u_g/u = 0$ となるから $k \approx 0.8$ と考えられる。⑧式を変形すると

$k - u_g/u < 0$ のとき

$$\frac{u_g}{u} = \frac{1 - \alpha k - \beta k - \sqrt{(1 - \alpha k - \beta k)^2 - (1 - \alpha + 2\beta)(1 - \alpha k^2 - A \frac{sgd}{u^2})}}{1 - \alpha - 2\beta}$$

$k - u_g/u > 0$ のとき

$$\frac{u_g}{u} = \frac{1 - \alpha k + \beta k - \sqrt{(1 - \alpha k + \beta k)^2 - (1 - \alpha + 2\beta)(1 - \alpha k^2 - A \frac{sgd}{u^2})}}{1 - \alpha + 2\beta}$$

$$\therefore \alpha = \mu' \frac{C_L}{C_D}, \quad \beta = \frac{4\mu' m}{C_D}$$

$$A = \frac{4}{3C_D} (\mu' \cos \theta - \sin \theta)$$

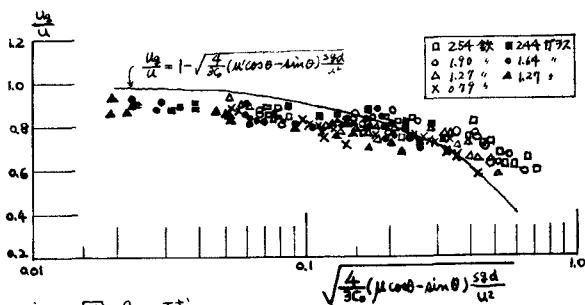


図-9 球