

まえがき

直線水路の片側に設置された越流型の水制区間は、水制群としての粗度効果によって、水制域の流速は流れ方向に減速され、逆に主流域の流速は加速される。一定の流量配分に漸近してくる。このとき横方向の流量(流速)分布は、図-1 に model 的に示すように水制域と主流域との間に流量(流速)が急激に変化する遷移領域を形成している。この形は境界層の発達のように水制区間前端からその厚さを増すが、下流にゆくとその発達割合を減じ、流れは一定のパターンを持つようになる。この遷移領域は水制の流量配分に影響をもたけなく、複合粗度の問題として理論的興味もあるので、以下簡単な model に基づいて検討してみたい。なお、解析に用いた実験は、 $b = \text{水路幅 } 12\text{m}$ 、 $b_2/b = 0.25$ 及 0.5 、水制高さ/水制間隔 $= 5, 10, 20$ とした組合せについて、それぞれ 3 種の流量について行われたものである。(第 22 回土木学会講演会)。

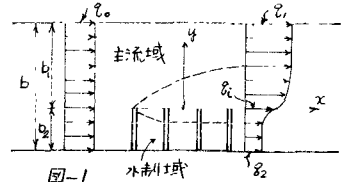


図-1 水制域

1. 流れの基礎式

水制区間長が充分長く、流れは平衡状態に達しくハナモノとする。水制の先端に原点をとり、流れ方向に x 軸、それに垂直水平に y 軸をとると、 x 方向には静水圧分布に依うとして、 x 方向の運動方程式を河床より水面まで積分すると、平均流速 U は次のようになる。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = g \left(1 - \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\tau_0}{\rho h} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (1)$$

こゝに、 τ_0 は河床の剪断応力、流速係数 φ とすると $\tau_0/\rho = u_*^2/\varphi^2$ と表わされ、 τ_{yx} は滑動粘性係数 η を導入して $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial U}{\partial y} \right)$ とある。

等流流れのなかに水制を設置した場合には、水制区間及びその上流には水面変化が誘起され、この変化は $b_2/b = 0.25$ の場合には小さく、 $b_2/b = 0.5$ の場合にはかなり影響を与えるようである。しかし乍ら、縦横の変化と同時に考慮することはきわめて困難であるので、横方向の遷移領域を主眼として x 方向の変化は無視する。主流域、水制域の流速係数 φ_1, φ_2 とし、遷移領域外側の主流速度、水制域速度を U_1, U_2 とすると、基礎式は、主流域、水制域にそれぞれ次のようになる。

$$\frac{U_1^2 - U_1^2}{\varphi_1^2} + \eta_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} = 0 \quad \frac{U_2^2 - U_2^2}{\varphi_2^2} + \eta_2 \frac{\partial U_2}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

こゝで、滑動粘性係数 η は、水制域、主流域の粗度の差異、あるいは流速係数(抵抗係数)の差異によって発生する乱れによるもので、その函数形は明確でない。従つて、次の

$$\text{Case I: } \eta = k \rho U \quad (3)$$

$$\text{Case II: } \eta = k \rho (U_1 - U_2) \quad (4)$$

$$\text{Case III: } \eta = l^2 \frac{\partial U}{\partial y} \quad (\text{Prandtl の仮定}) \quad (5)$$

を考へ、それぞれに對する(2)の解である流量分布形を實驗値と比較し、 η の函数形、係数 k_1 などについて検討するにとある。

2 横方向遷移領域の解 — $\eta = k_1 u$ の場合

i) 主流域・基礎式(2)に、 $\eta_1 = k_1 u_1$ を用いると、

$$\frac{U_1^2 - u_1^2}{\eta_1^2} + k_1 R^2 u_1 \frac{d^2 u_1}{dy_1^2} = 0 \quad \text{----- (6)}$$

いま、 $K_1^2 = 2/k_1 R^2 \eta_1^2$ において、境界条件 $y=0: u_1 = u_1$ (木刺尖端の流速)、 $y=t_1: u_1 = U_1$ と導入すると

$$\frac{U_1^2 - u_1^2}{U_1^2 - u_1^2} = \frac{\sinh K_1 (t_1 - y_1)}{\sinh K_1 t_1} \quad \text{--- (7)}$$

$$\text{--- 1, } K_1^2 = \frac{2}{k_1 R^2 \eta_1^2}$$

木刺域 ($y < 0$) と同様にして

$$\frac{u_2^2 - U_2^2}{U_2^2 - U_2^2} = \frac{\sinh K_2 (t_2 + y_1)}{\sinh K_2 t_2}, \quad \text{--- (8)}$$

$$\text{--- 2, } K_2^2 = \frac{2}{k_2 R^2 \eta_2^2}$$

係数 K_1, K_2 を實驗結果より検討してみる。 t_1 は y 方向に変化しないため u はすべて 0 とおき、(7)

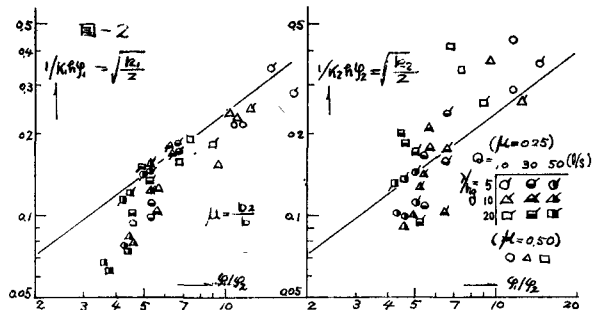
(8) において $K_1 t_1, K_2 t_2 > 2$ とあるため、次の近似式

$$\frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 - q_2^2} \doteq e^{-K_1 y}, \quad \frac{q_2^2 - q_2^2}{q_2^2 - q_2^2} \doteq e^{-K_2 y} \quad (y < 0) \quad \text{----- (9)}$$

を用いて、 K_1, K_2 を計算する。 $1/K_1 R \eta_1, 1/K_2 R \eta_2$ を lateral 方向の流速分布を発生させる要因と

ある q_1/q_2 に対して plot すると、図-2 のように k_1 と q_1/q_2 の間にはかなり明確な相関関係が得られる。仮定に近々実験として $\mu = 0.25$ の資料を主に用い、 $q_1/q_2 = 1$ で $1/K_1 R \eta_1 = \sqrt{k_1/2} = 0.0426$ とする。また、 $\sqrt{k_1/2} = 0.0426 (q_1/q_2)^{0.25}$ とし、

$$k_1 = \frac{1}{2.75} \left(\frac{q_1}{q_2} \right)^{0.25}$$



と=1、 $\eta_1 \approx 2.75$ 。上の表示で $q_1 = q_2$ のときは、 $(K_1) q_1 = q_2 = 1/2.75$ とある。一方、vertical 方向の滑動粘性係数は、 $\varepsilon = K u \eta / 6$ と等しいから、 $\eta_{vertical}$ は、 $(1/15 \eta_1)$ と表わされ、これは Case I の $\eta_{lateral} = 1.5 \eta_1$ と同形である。さらにこの実験では、 $q_1 = 18.4$ とあるから、 $(K_1) q_1 = q_2 = 1/2.75 = 1/15 \eta_1$ とおける。従つて、遷移領域にみられる顕著な速度勾配は q_1/q_2 の差異によつて発生し、横方向の滑動粘性係数は縦方向のものの $(q_1/q_2)^{0.25}$ 倍であることが推定され、係数 k_1 は次の形にあく。

$$k_1 = \frac{1}{15 \eta_1} \left(\frac{q_1}{q_2} \right)^{0.25} \quad \text{----- (10)}$$

あと述べる Stress の連続条件から $k_1 = k_2 = k$ とあることから、 K_1, K_2 は

$$K_1 = \sqrt{\frac{2}{k}} \frac{1}{R \eta_1} = \sqrt{30 \eta_1} \left(\frac{q_1}{q_2} \right)^{0.25} \frac{1}{R \eta_1}, \quad K_2 = \sqrt{30 \eta_1} \left(\frac{q_1}{q_2} \right)^{0.25} \frac{1}{R \eta_2} \quad \text{----- (11)}$$

(11) における η_1 は、 t_1 は無肉部には一定とみなされるが、 η_2 は材料度実験から R/η_2 によつて図-3

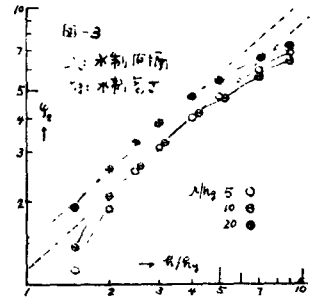
のよりに変化する。なお、 $R/R_g = 1.5 \sim 7$ の範囲では近似的に直線とみなせる。従って

$$\eta_2 = \alpha (R/R_g)^m \quad (12)$$

== 1. α, m は λ/R_g の函数で、 $\alpha = 1.1 \sim 1.5, m = 0.7 \sim 0.9$ である。

結局 K_1, K_2 は (12) を用いると、

$$K_1 \eta = \sqrt{30} \alpha \eta^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{R}{R_g}\right)^{m(n-\frac{1}{2})} \frac{1}{R_g}, \quad K_2 \eta = \sqrt{30} \alpha \eta^{n-1-\frac{1}{2}} \left(\frac{R}{R_g}\right)^{m(n-1-\frac{1}{2})} \frac{1}{R_g} \quad (13)$$



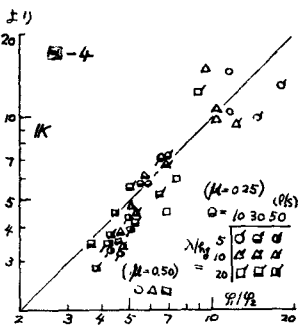
ii) $y=0$ における Stress の連続条件。 $\eta_1 (du_1/dy)_{y=0} = \eta_2 (du_2/dy)_{y=0}$

$$+ k_1 \left(\frac{du_1^2}{dy} \right)_{y=0} = + k_2 \left(\frac{du_2^2}{dy} \right)_{y=0} \quad (14)$$

(7), (8) を微分して、(14) に代入すれば、

$$\frac{U_1^2 - U_2^2}{U_1^2 - U_2^2} = \frac{k_2 K_2}{k_1 K_1} \frac{\cosh K_2 b_2}{\cosh K_1 b_1} = \frac{k_2 K_2}{k_1 K_1} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \frac{\eta_1}{\eta_2} = K \quad (15)$$

実験結果から、 U_1, U_2 を用いて逆算した K を η_1/η_2 に対して plot すると図-4 に示すように、 K は η_1/η_2 にほぼ等しい。従って $k_1 \approx k_2$ であるとみなせる。(11)参照。先端速度 u_1 は、 $U_2/U_1 \approx \eta_2/\eta_1$ を考慮すれば、図-5 に示すように



$$\frac{u_1}{U_1} = \sqrt{\frac{1 + (U_2/U_1)^2 K}{1 + K}} = \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}} \quad \frac{u_1}{U_2} = \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}} \quad (16)$$

iii) 流量分布式は、(7), (8), 及びその簡略式 (9) を表わせる。

なお、(16) を用いれば、

$$\text{主流域: } \frac{q}{q_1} = \left[1 - \left(1 - \frac{q_1}{q_2} \right) \frac{\sinh K_1 (b_1 - y)}{\sinh K_1 b_1} \right]^{1/2} \quad (17)$$

$$= \left[1 - \left(1 - \frac{q_1}{q_2} \right) e^{-K_1 y} \right]^{1/2} \quad (18)$$

$$\text{水相域: } \frac{q}{q_2} = \left[1 + \left(\frac{q_1}{q_2} - 1 \right) \frac{\sinh K_2 (b_2 + y)}{\sinh K_2 b_2} \right]^{1/2} \quad (19)$$

$$= \left[1 + \left(\frac{q_1}{q_2} - 1 \right) e^{K_2 y} \right]^{1/2} \quad (20)$$

3. 横方向遷移領域の解 $\eta = k R (\tau_1 - \tau_2)$ の場合

i) 主流域: 基礎式 (2) に、 $\eta_1 = k_1 R (\tau_1 - \tau_2)$ を用いると、

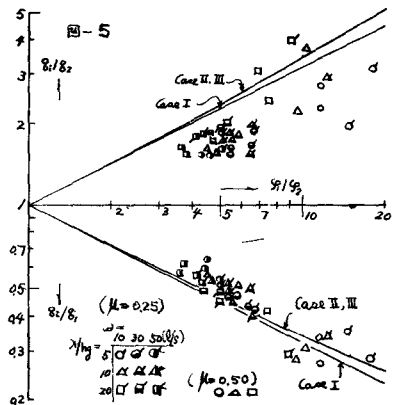
$$\frac{U_1^2 - U_2^2}{\eta_1^2} + k_1 R^2 (\tau_1 - \tau_2) \frac{d^2 u_1}{dy^2} = 0. \quad (21)$$

のよ、 $K_1^2 = 3 k_1 R^2 \eta_1^2 (\tau_1 - \tau_2) / 2 U_1$ とおいて、境界条件 $u_1 = U_1, du_1/dy = 0$ を導入すると、

$$\frac{du_1}{dy} = + \sqrt{\frac{1}{K_1^2 \tau_1}} (\tau_1 - u_1)^2 (2 \tau_1 + u_1) \quad (22)$$

$u_1/\tau_1 = \chi_1$ とおき積分して $I(\chi_1) = \int d\chi_1 / (1 - \chi_1)(2 + \chi_1)^{1/2} = y/K_1$ と表わせば、

$$I(\chi_1) - I(\chi_{10}) = \frac{y}{K_1}. \quad \text{== 1. } \chi_1 = u_1/\tau_1, \chi_{10} = u_{10}/\tau_1, K_1^2 = 3 k_1 R^2 \eta_1^2 (\tau_1 - \tau_2) / 2 U_1 \quad (23)$$



水制域 ($y < 0$) と同様 LZ ,

$$I(\gamma_1) - I(\gamma_2) = \frac{y}{K_2} \quad \text{--- (24)}$$

$$Z = 1, \quad \gamma_2 = U_2/U_1, \quad \gamma_{12} = U_1/U_2$$

$$K_2^2 = 3 k_2 R^2 \varphi_2^2 (U_1 - U_2) / 2 U_2$$

係数 K_1, K_2 は実験結果より得られ、図-6
のようになるから、直線を仮定すれば

$$\frac{K_1}{R \varphi_1} \sqrt{1 - \frac{U_2}{U_1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} k_1 = \alpha_1 \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right)^{n_1}, \quad \frac{K_2}{R \varphi_2} \sqrt{\frac{U_1}{U_2} - 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} k_2 = \alpha_2 \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right)^{n_2} \quad \text{--- (25)}$$

$$\therefore \alpha_1 = \alpha_2 \approx 0.17, \quad n_1 \approx 0.69, \quad n_2 \approx 0.44.$$

ii) Stress の連続条件から

$$+k_1 \left(\frac{du_1}{dy} \right)_{y=0} = +k_2 \left(\frac{du_2}{dy} \right)_{y=0} \quad \text{--- (26)}$$

(22) を用いると、

$$\frac{(U_1 - U_2) (2U_1 + U_2)^{1/2}}{(U_2 - U_1) (2U_2 + U_1)^{1/2}} = \frac{k_1}{k_2} \frac{K_1}{K_2} \sqrt{\frac{U_1}{U_2}} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = IK \quad \text{--- (27)}$$

図-7 の実験結果から $IK = (\varphi_1/\varphi_2)^{3/2}$ 従って $k_2/k_1 = \sqrt{\varphi_1/\varphi_2}$ である。尖端
速度 U_1 は、(27) から得られ、図-5 の曲線を示される。

iii) 流速分布形は、 φ_1/φ_2 を与えれば、図-5 の関係から尖端流量 Q_2 が定まり、(25) と用いる (23), (24) から γ_1, γ_2 すなわち φ_1, φ_2 を与えれば Q が求まる。

4. 結果

計算および実験結果と Case III を合わせて示すと、図-8
のようになる。Case I がよく一致している。図-2, 5
における係数 k_1, k_2 の取り方も、Case I によれば無理が
ないようである。

5. まとめ

断面の小さな越流型連続水制の流況においては、水制
主流域の粗度の差による乱れが発生する。これを
流速係数の割合 φ_1/φ_2 によって代表させれば、遷移領域
における流量分布は、渦動粘性係数として $\eta = k R U_1$ に
よって規定されることを分った。

