

九大工学部 正員 栗谷陽一
 九大工学部大学院 学生員 〇田中経彦
 九大工学部 学生員 小山弘道

1. まえがき 活性汚泥法の曝気槽での散気は、気泡から処理水への酸素の供給と、汚泥が沈殿しないための旋回流の誘起とを大きな目的としている。気泡からの酸素移動量は気泡の上昇速度が小さい程(滞留時間が長い程)大きく、旋回流速は気泡の上昇速度が大きい程大きくなる。この相矛盾する関係の間に最良の効率を与える関係を見いだすことは重要なことと思われる。また、散気板の幅、設置深さも酸素供給と旋回流とに大きな影響を及ぼすことが定性的には知られているが、これらの関係はまだ解析的には十分把握されていない様である。これを解明するために気泡噴流の性質を明らかにすると共に気泡噴流と旋回流との相互作用を明らかにせねばならない。この研究は気泡の水に対する相対速度と散気装置の幅とが気泡噴流ほどのように影響するかを調べようとするものである。

2. 噴流と旋回流との関係 旋回流は気泡噴流から連続的なエネルギーの供給を受け旋回の途中で渦流などによるエネルギーの損失を受けつつある一定の旋回流速を保っていると考えられる。この状態で運動量の損失が旋回流速の2乗に比例すると考えて運動量の保存則を適用すると次の関係が成り立つ。

$$CWU^2 = PBu^2 - PBWU \quad (1)$$

ここに u : 噴流の平均上昇流速 U : 旋回流の平均流速
 B : 噴流の幅 W : 槽単位長さ当りの水量
 P : 水の密度 C : 常数

(1) 式を U に関して解いて整理すれば次のようになる。

$$U = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{PB}{CW} \right)^2 + 4 \left(\frac{PB}{CW} \right) - \frac{PB}{CW} \right] \cdot u \quad (2)$$

上昇流速のエネルギー $E = \frac{1}{2} P u^3 B$ を (2) 式に代入して $\frac{PB}{CW} = x$ とおけば

$$U^2 = \frac{1}{4x} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)^2 \frac{E}{CW} \quad (3)$$

となる。(3) 式よりある一定の噴流のエネルギー E (ひいては u) が与えられたとき、最大の旋回流速を与える x が求まり、噴流の幅 B が求められる。それは次のようになる。

$$B = 0.56 \frac{CW}{P}$$

一方散気効果に対しては気泡の大きさ及び散気板の深さを一定とすれば、上昇流速 u が遅い程滞留時間が長くなり、好ましい。この意味でも気泡噴流の幅 B が重要であることが考えられる。これらの事を更に精確に考察するには気泡噴流の基礎的な性質の理解が必要であると思われる。次にいくつかの仮定をして単純化した場合の気泡噴流の挙動について論じる。

3. 気泡噴流の性質

1) 気泡の相対上昇速度の影響 散気板の幅と、気泡の上昇による体積変化は無視でき、現

象は2次元的存在と仮定する。運動量の拡散係数はテラーの仮定を用い、フントルの拡散係数に $\frac{1}{2}$ をかけたものを用い、気泡の拡散係数と区別することにした。気泡噴流などの運動量、流体の質量及び空気量の保存則は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (D \frac{\partial u}{\partial y}) + \sigma g \\ (w+u) \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (D \frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

散気板表面の中心軸に直角水平方向に y 軸、鉛直上方に x 軸をとる。

(4) 式中 u : x 方向流速 v : y 方向流速 σ : 気泡密度

w : 気泡と水流の相対速度 (一定) D : 拡散係数

(1) 式を解くに当って、相似性を仮定し独立変数を $\eta = y/x$ に変換し更に、流れ関数 $\psi = x\phi(\eta)$ を導入すれば

$$\left. \begin{aligned} u &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_x = \frac{1}{x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_x = \phi' \\ v &= - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_y = -\phi + \eta \phi' \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

となる。また混合距離が x に比例するとして拡散係数を次のように与える。(C: 常数)

$$D = C^2 x^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y} = -C^2 x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = -C^2 x \phi'' \quad (6)$$

気泡密度は x に比例して減少するとして

$$\sigma = \frac{1}{x} \tau(\eta) \quad (7)$$

とおく。(5), (6), (7) 式を(4)に代入すれば

$$\text{第一式より } \phi \phi'' = C^2 \phi'' \phi''' - \tau g \quad (8)$$

$$\text{第二式より } w(\tau + \eta \tau') + \phi' \tau + \phi \tau' = C^2 (\phi'' \tau' + \phi' \tau'') \quad \text{これを積分して}$$

$$w \eta \tau + \phi \tau = C^2 \phi'' \tau' \quad (\text{積分常数} = 0) \quad (9)$$

ここで独立変数 η を $\zeta = \eta/C^{\frac{1}{2}}$ に変換し $\rho = C^{\frac{1}{2}} \tau g$, $\omega = C^{\frac{1}{2}}$ とおくと(8), (9) 式は次のようになる

$$\left\{ \begin{aligned} \phi \phi'' &= \phi'' \phi''' - \rho \\ \omega \zeta \rho + \phi \rho &= \phi'' \rho' \end{aligned} \right.$$

さらに $\Phi = \phi/\omega$, $\Theta = \rho/\omega^2$ とおけば

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi \Phi'' - \Phi \Phi''' &= \Theta \\ \Phi \Theta' - \Phi \Theta &= \zeta \Theta \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi \Theta' - \Phi \Theta &= \zeta \Theta \end{aligned} \right. \quad (11)$$

ここに $\zeta' = u_0/\omega$, $\Phi_0 = u_0/\omega$, $\Theta_0 = g x \sigma / \omega^2$ (u_0 : 噴流中央での速度) となっている。

Schmidt の加熱気流に関する計算における手法と同様にして Φ , Θ を次のようなべき級数におく

$$\Phi = \Phi_0 \zeta + \Phi_1 \zeta^{\frac{3}{2}} + \Phi_2 \zeta^2 + \Phi_3 \zeta^{\frac{5}{2}} + \Phi_4 \zeta^3 + \Phi_5 \zeta^{\frac{7}{2}} + \dots \quad (12)$$

$$\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 \zeta^{\frac{1}{2}} + \Theta_2 \zeta + \Theta_3 \zeta^{\frac{3}{2}} + \Theta_4 \zeta^2 + \Theta_5 \zeta^{\frac{5}{2}} + \dots \quad (13)$$

(12), (13) 式を(10), (11)式に代入し、両辺の同じべきの ζ の係数を等しいとおき、

$$\frac{225}{32} \Phi_1^2 = \Theta_0, \quad \frac{225}{32} \Phi_1 \Phi_2 - \frac{15}{4} \Phi_0 \Phi_1 = \Theta_1, \quad \dots \dots \dots$$

$$\frac{45}{8} \Phi_1 \Theta_1 - \Phi_0 \Theta_0 = \Theta_0, \quad \frac{45}{8} \Phi_1 \Theta_2 + 18 \Phi_2 \Theta_1 - \Phi_0 \Theta_1 - \Phi_1 \Theta_0 = \Theta_1, \quad \dots \dots \dots$$

ここで $\zeta = \zeta_0$ において $\Phi' = 0$, $\Phi'' = 0$ なる境界条件を用いると Φ_0 に対する Θ_0 , ζ_0 の値が定められることになる。これらの関係を図-1に示す。ここで ζ_0 は噴流境界である。 Φ を与えれば

Θ_0 はわかるから $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n, \Theta_{n+1}$ が順次求められる。

次に単位時間当りの空気量 Q は

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(u+w) dy = \frac{\pi^3}{2c^2} \int_0^{\infty} \Theta(x+1) dx$$

となる。 Θ をパラメータとして、 Q を求めれば Q と u_0 との関係が求められる。

気泡上昇速度は気泡密度が著しく高くない限り、気泡径 $1.5 \text{ mm} \sim 4 \text{ mm}$ の範囲では事実上 2.3 cm/sec としてよい。 Θ の値を実測の流速を 2.3 cm/sec で除した値に等しいとおいて実験結果と比較すると、図-2 を得る。定性的には一致している。気泡の水に対する相対速度を無視すれば、噴流の上昇速度は空気量の $1/2$ 乗に比例することが知られているが、相対速度を考慮した場合、この $1/2$ 乗法則からのはずれが与えられる。これは、気泡のエネルギー損失の増大をしめすものである。

ii) 幅のある散気板からの噴流 気泡の相対速度のある場合、気泡分布の幅と噴流の幅は異なると考えられる。この場合も、座標の取り方、記号を i) と同じにすれば (4) が成り立つ。厳密な解を求めることは困難なので流速及び気泡の分布を誤差分布と仮定し、流速に対して、中心軸上の値を $U(x)$ 、幅を $B(x)$ とし、 $u = U e^{-(y/B)^2}$ 、気泡密度に対して中心軸上の値を $\sigma(x)$ 、幅を $b(x)$ とし、 $\sigma = \sigma_0 e^{-(y/B)^2}$ とする。

また $D = -c^2 B^2 \frac{\partial u}{\partial y}$ とおく。これらを (4) に代入し、両辺を $-\infty \sim \infty$ で y に関して積分すれば

$$\text{第一式より } 2UB \frac{dU}{dx} + U^2 \frac{dB}{dx} = \sqrt{2} g b Q$$

$$\text{第二式より } b \sigma_0 \left(w + \frac{BU}{\sqrt{B^2 + b^2}} \right) = \text{const.}$$

次に第一式の両辺に y を掛けて同様にして、

$$(4 + \pi) UB^2 \frac{dU}{dx} + (2 + \pi) U^2 B \frac{dB}{dx} = \sqrt{2} \pi c^2 U^2 B + 4g \sigma_0 b^2$$

が求められる。まず手はじめとして、相対速度を無視し、噴流と気泡の幅の比が一定であるとし $b = \alpha B$ とおくと上の3式は次のようになる。(α : 常数)

$$\begin{cases} 2UB \frac{dU}{dx} + U^2 \frac{dB}{dx} = \sqrt{2} g \sigma_0 B \alpha & (14) \\ U \sigma_0 \frac{B}{\sqrt{2}} = \text{const.} & (15) \\ (4 + \pi) UB^2 \frac{dU}{dx} + (2 + \pi) U^2 B \frac{dB}{dx} = \sqrt{2} \pi c^2 U^2 B + 4g \alpha^2 \sigma_0 B^2 & (16) \end{cases}$$

空気量は $Q = \sqrt{\frac{\pi}{2}} B \sigma_0 U$ であり、これを考慮して (14) 式は

$$2B \frac{dU}{dx} + U \frac{dB}{dx} = \frac{2}{\pi} \frac{g Q}{U^2} \alpha \quad (17)$$

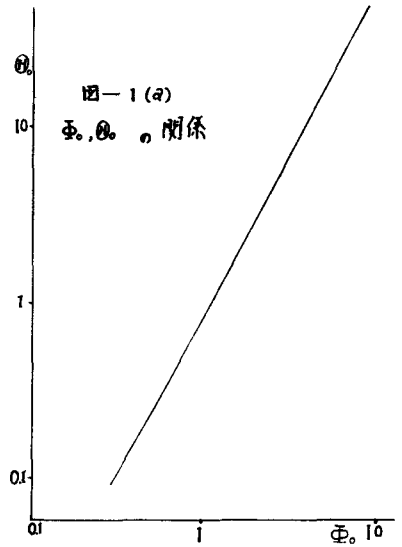


図-1(a)
 Q, D_b の関係

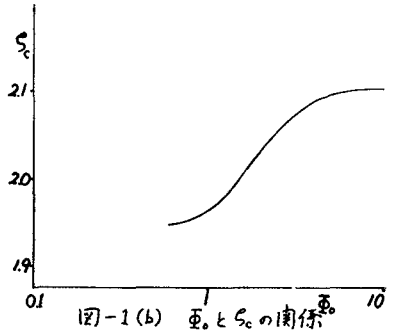


図-1(b)
 Q と D_b の関係

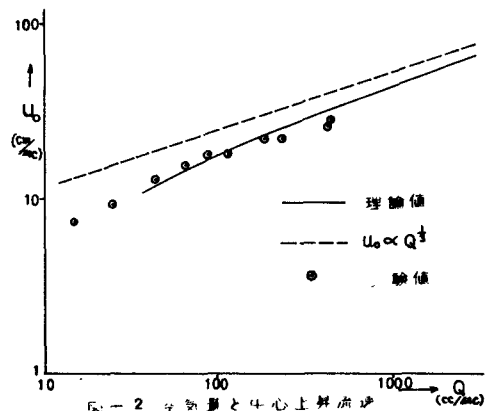


図-2 分散量と中心上昇速度

(16), (17) 式より

$$\sqrt{\frac{1}{c}} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{c}} (\sqrt{2}\alpha - 1) \right\} B \frac{dB}{dx} + \sqrt{\frac{1}{c}} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{c}} (\sqrt{2}\alpha - 1) \right\} U \frac{dU}{dx} = U \quad (18)$$

$U = k_1 U_*$, $B = k_2 B_*$ (k_1, k_2 は定数) とおいて (17), (18) に代入すれば

$$\left\{ \begin{aligned} k_1 k_2 (2 B_* \frac{dB_*}{dx} + U_* \frac{dU_*}{dx}) &= \frac{2}{\sqrt{c}} \frac{dQ}{dx} \frac{\alpha}{U_*^2} \\ k_1 k_2 \sqrt{\frac{1}{c}} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{c}} (\sqrt{2}\alpha - 1) \right\} B_* \frac{dB_*}{dx} &+ \sqrt{\frac{1}{c}} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{c}} (\sqrt{2}\alpha - 1) \right\} U_* \frac{dU_*}{dx} \\ &= k_1 U_* \end{aligned} \right. \quad (19)$$

$$= k_1 U_* \quad (20)$$

(19), (20) において $k_1^3 = \frac{2}{\sqrt{c}} \frac{dQ}{dx}$, $k_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{c}} (\sqrt{2}\alpha - 1) \right\}}}$ とおけば、(19), (20) は次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} 2 B_* \frac{dB_*}{dx} + U_* \frac{dU_*}{dx} &= \frac{1}{U_*} \rightarrow \frac{d}{dx} (U_*^2 B_*) = \frac{1}{U_*} \\ B_* \frac{dB_*}{dx} + K U_* \frac{dU_*}{dx} &= U_* \rightarrow \frac{d}{dx} (U_* B_*^K) = B_*^{K-1} U_* \end{aligned} \right. \quad (21)$$

$$B_* \frac{dB_*}{dx} + K U_* \frac{dU_*}{dx} = U_* \rightarrow \frac{d}{dx} (U_* B_*^K) = B_*^{K-1} U_* \quad (22)$$

ただし $K = \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{c}} (\sqrt{2}\alpha - 1) \right\} / \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{c}} (\sqrt{2}\alpha - 1) \right\}$ である。

さらに $U_* B_* = X$, $U_* B_*^K = Y$ ---- (23) とおけば (21), (22) は

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= X^{\frac{K}{2K-1}} Y^{\frac{2K-1}{2K-1}} \\ \frac{dY}{dx} &= X^{\frac{1}{2K-1}} Y^{\frac{2K-3}{2K-1}} \end{aligned} \right. \quad (24)$$

$$\frac{dY}{dX} = X^{\frac{1-K}{2K-1}} Y^{\frac{2K-3}{2K-1}} \quad (25)$$

となる。(25) を (24) で辺々割れば

$$\frac{dY}{dX} = X^{\frac{K-1}{2K-1}} Y^{\frac{2K-3}{2K-1}} \quad (26)$$

これは変数分離形で、ただちに積分で与る

$$Y = \left(\frac{1}{K} X^{\frac{3K}{2K-1}} + \frac{3}{2K-1} \text{const.} \right)^{\frac{2K-1}{3}} \quad (27)$$

(27) で $\text{const.} = B_*^{\frac{3K}{2K-1}}$ とし, $B_1 = \frac{B_*}{B_0}$ とおいて新たに

$$U_* B_* = X, U_* B_*^K = Y \quad \text{---- (28) とおいて}$$

$$Y = \left(\frac{1}{K} X^{\frac{3K}{2K-1}} + \frac{3}{2K-1} \right)^{\frac{2K-1}{3}} \quad (29)$$

が求められる。さらに $X = \frac{x}{B_0}$ とおいて (29) を (25) に代入すれば、

$$\frac{dX}{dx} = X^{\frac{K}{2K-1}} \left\{ \frac{1}{K} X^{\frac{3K}{2K-1}} + \frac{3}{2K-1} \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (30)$$

が求められる。(30) 式を K をパラメータにして数値積分し、 X を求め (27) により Y を求めれば (28) の関係より

$$B_1 = Y^{\frac{2}{2K-1}} X^{\frac{-1}{2K-1}}, U = Y^{\frac{1}{2K-1}} X^{\frac{K}{2K-1}}$$

が x の関数として求められる。 $K=1.5, 2.0$ の場合の数値計算の結果を図-3に示す。

この計算は流速と空気密度の分布形および $b \propto B$ といった仮定が正しくは成り立たないはずであるから厳密には正しいものではないが散気板の近くを除けば観察された気泡噴流の形をほぼあらわしているようである。散気板の近くは相対速度の影響が大きいので、これを考慮して散気板の幅と気泡噴流との関連を求めなければならぬ。本論文の計算には、九州大学中央計数施設の OKITAC-5090-H 電子計算機を使用した。

参考文献

W. Schmidt, Zeitschrift für Angewandte Mathematische Mechanik 21, 265, 1941

応用科学研究所水工学研究委員会, 九大応用科学研究所報 第13号 P39 昭和34年

W.L. Huberman and R.K. Morton, Proceeding of the American Society of Civil Engineers 66/80 P387 1954

