

集水暗渠の取水量の解析

全 正員 ○杉尾 哲

| まえがき

上面に湛水がある均一無限大の浸透領域内に円形暗渠があり、暗渠内は被圧水で満たされている場合の暗渠取水を考えてみる。この暗渠断面の周辺は円は一つの等ポテンシャル線であり、これに対する sink (流入点) は図-1 に示すようにこの円の中心よりやや上にある。しかし従来は、このような場合、円形暗渠の中心を流入点とした解析により流入量を求めている (Muskat¹⁾, Kirkham²⁾ etc)。したがって、理論的流入点と暗渠中心とのずれが大きくなる場合 すなわち管径が大となるか、暗渠が浸透領域上面に近づくとき算定流入量の誤差が大きくなるものと考えられる。本報は上記の誤差を除くために、与えられた円形暗渠周辺すなわち一つの等ポテンシャル線に対する理論的流入点を用いて暗渠取水量算定式を導いたものである。なお浸透領域は、まず長方形の場合について m 関数によって解析し、次いでこの領域を左右方向、深さ方向および上記の両方向(半無限領域)に無限大に拡張した場合の暗渠の取水量算定式を求めた。次いでこれらの計算結果および従来の算定式による結果と被膜抵抗係数を用いた電気モデルの実験と比較検討した。

2. 基礎式

浸透流の解析に複素ポテンシャルを利用すると、
2次元非回転定常流の基礎理論から Ω を流れの
複素関数、 Φ を速度ポテンシャル、 ψ を流れ関数、
 W を複素ポテンシャル、 u, v をそれぞれ x, y
の正方向 (x の正方向は鉛直下向きとする。) の
流速と考えると、

$$\Sigma = \chi + i\eta, \quad W = \Phi + i\Psi \quad \dots\dots (1)$$

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots (2)$$

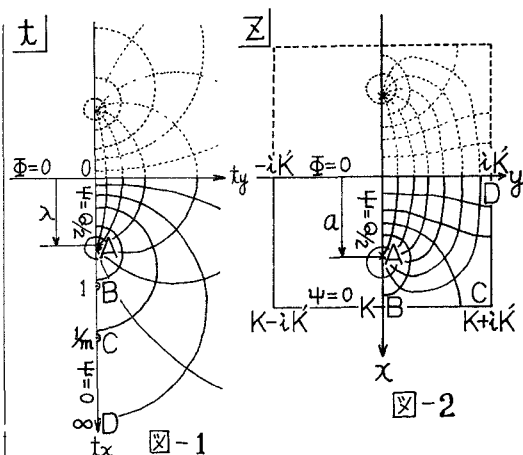
が成り立つ。次に水平基準線として y 軸を取り、それから測った流れの場の任意点の全水頭をととし、その点の圧力を P 、位置水頭と z 、水の単位重量をとすれば、

$$h_c = (P/w) - \chi \quad \dots \dots (3)$$

いま透水係数を k とすると Darcy の法則より

$$u = -k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad v = -k \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad \dots (4)$$

し $= 10^n$, $\tau(2)$, (3) および (4) 式から



$$\Phi = kh = k \{ (\frac{P}{\omega}) - x \} \quad \dots (5)$$

とある。

こゝで写像関数を求める。一般に長方形を半平面へ写像する関数は、 z 平面上の楕円の積分の

$$Z = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-m^2 t^2)}}, \quad (0 < m < 1) \quad (b)$$

で表わされるが、逆に半平面と長方形領域内へ写像する座標は(6)式の逆座標「 zn 座標」であり、次式で計算できる。

$$t = \alpha n(Z, m) = Z - (1-m^2) \frac{Z^3}{3!} + (1+14m^2+m^4) \frac{Z^5}{5!} \dots (7)$$

ここに m は αn 関数の母数で、その値は完全楕円積分表³⁾から図-2の長方形領域の縦横の比 K'/K に対して求まる。

いま縦横無限大の t 平面に強さ μ の流入、流出点を持つ流れがあり、 t_y 軸より流入点までの距離と入とすると W 面に対する写像関数は

$$W = -\mu \ln \frac{t-\lambda}{t+\lambda} \dots (8)$$

である。そこで図-1の t 平面の流れを図-2の長方形領域 (Z 平面) で検討するには「写像の繰返し」を行えば良いから、 W 平面に対する写像関数は(8)式と(8)式で代入して

$$W = -\mu \ln \frac{\alpha n(Z, m) - \alpha n(a, m)}{\alpha n(Z, m) + \alpha n(a, m)} \dots (9)$$

で表わされる。ここに a は y 軸より流入点までの距離とする。

3. 解析

写像関数(9)式より速度ポテンシャル Φ と流れ関数 ψ は αn 関数の虚数の加法定理を使って得られるが、この Z 平面の流れを

$$Z = \frac{H}{K} z \dots (10)$$

の関係式により実際の流れの領域 (Z 平面) に座標変換すると、

$$x = \frac{K}{H} X, \quad y = \frac{K}{L} Y \dots (10')$$

を代入して

$$\Phi = -\frac{\mu}{2} \ln \frac{\left[\alpha n\left(\frac{K}{H}X, m\right) \alpha n\left(\frac{K}{L}Y, m\right) - \alpha n\left(\frac{K}{H}X_0, m\right) \left\{ 1 - \alpha n^2\left(\frac{K}{L}Y, m\right) \alpha n^2\left(\frac{K}{H}X, m\right) \right\} + \alpha n^2\left(\frac{K}{L}Y, m\right) \alpha n^2\left(\frac{K}{H}X, m\right) \alpha n^2\left(\frac{K}{L}Y, m\right) \alpha n^2\left(\frac{K}{H}X, m\right) \right]}{\left[\alpha n\left(\frac{K}{H}X, m\right) \alpha n\left(\frac{K}{L}Y, m\right) + \alpha n\left(\frac{K}{H}X_0, m\right) \left\{ 1 - \alpha n^2\left(\frac{K}{L}Y, m\right) \alpha n^2\left(\frac{K}{H}X, m\right) \right\} + \alpha n^2\left(\frac{K}{L}Y, m\right) \alpha n^2\left(\frac{K}{H}X, m\right) \alpha n^2\left(\frac{K}{L}Y, m\right) \alpha n^2\left(\frac{K}{H}X, m\right) \right]} + \mu' \dots (11)$$

$$\psi = -\mu \tan^{-1} \frac{2 \alpha n\left(\frac{K}{H}X_0, m\right) \left\{ 1 - \alpha n^2\left(\frac{K}{L}Y, m\right) \alpha n^2\left(\frac{K}{H}X, m\right) \right\} \alpha n\left(\frac{K}{L}Y, m\right) \alpha n\left(\frac{K}{H}X, m\right) \alpha n\left(\frac{K}{L}Y, m\right) \alpha n\left(\frac{K}{H}X, m\right)}{\alpha n^2\left(\frac{K}{H}X, m\right) \alpha n^2\left(\frac{K}{L}Y, m\right) - \alpha n^2\left(\frac{K}{H}X_0, m\right) \left\{ 1 - \alpha n^2\left(\frac{K}{L}Y, m\right) \alpha n^2\left(\frac{K}{H}X, m\right) \right\} + \alpha n^2\left(\frac{K}{L}Y, m\right) \alpha n^2\left(\frac{K}{H}X, m\right) \alpha n^2\left(\frac{K}{L}Y, m\right) \alpha n^2\left(\frac{K}{H}X, m\right)} \dots (12)$$

となる。ここに μ' は定数で $X=0$ の時 $\alpha n\left(\frac{K}{H}X, m\right)=0$ 流量を求めることによって与えられるので(2)式があるから(11)式が $\Phi = \mu'$ となり、地表面の速度ポテンシャルの値は透水圧 $P = \omega H_0$ および(5)式より

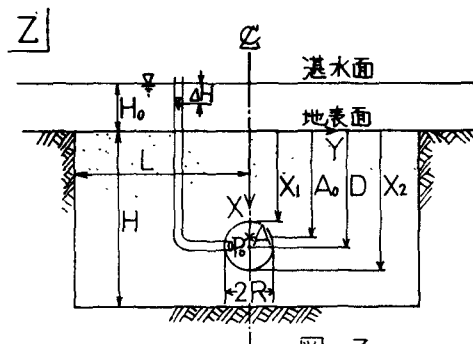


図-3

$\Phi = k H_0$ となって次式を得る。

$$\mu' = k H_0 \dots (13)$$

ここで地表面より流入点までの深さ A_0 を求める。前にも述べたように、 t 平面に $A_0 = D$ とする従来の方法では流入点と暗渠中心とのずれが大きくなった場合、算定流入量の誤差が大きくなると考えられる。ここで集水暗渠の側壁は一つの等ポテンシャル線であることを利用して、図-3のように A 点を包有して曲線線とすし Z 平面の等ポテンシャル線を暗渠断面と考へれば、 X 軸との2交点 ($X=X_1, X_2$) における速度ポテンシャルの値 Φ_1, Φ_2 が等しいことより(11)式よりこの等ポテンシャル線を

$$\alpha n\left(\frac{K}{H}A_0, m\right) = \sqrt{\alpha n\left(\frac{K}{H}X_1, m\right) \cdot \alpha n\left(\frac{K}{H}X_2, m\right)} \dots (14)$$

とする理論的流入点の位置が求められるので、(14)式による A_0 の値を使って上記の誤差を取り除かなければならない。また流入点の強さ μ は集水暗渠の側壁の代りに、これは一つの等ポテンシャル線と表わして Y 軸に沿って X 方向の流速と積分し

$$Q = 2 \int_0^L U_{x=0} dY$$

$$= 4\mu \int_0^L \frac{\frac{K}{H} \Delta n(\frac{K}{H} Y, m) \cdot \Delta n(\frac{K}{H} A_0, m)}{\Delta n(\frac{K}{H} A_0, m) \{1 - \Delta n(\frac{K}{H} Y, m)\} + \Delta n(\frac{K}{H} Y, m)} dY \quad (15)$$

で表わされる。この積分は定数を $C = \Delta n(\frac{K}{H} A_0, m)$ と置いて $\theta = \Delta n(\frac{K}{H} Y, m)$ で変数変換すると、

$$Q = 4\mu C \int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2} \{ \theta^2(1-C^2) + C^2 \}} \quad \dots (16)$$

と簡単になり その結果

$$\mu = \frac{Q}{2\pi} \quad (17)$$

が得られる。(16)より集水暗渠による取水量が既知であれば(11),(13)および(17)式より図-3の領域内における任意点の速度ポテンシャルの値が計算でき、逆に速度ポテンシャルの値が既知であれば取水量が計算できる。

ここに集水暗渠の表面における速度ポテンシャルの値は

$$\phi = h(P_{\infty} - D) \quad \dots (18)$$

で与えられているので、求める単位時間、単位長さ当たりの取水量は

$$Q = \frac{2\pi h(H_0 + D - P_{\infty})}{\ln \frac{\sqrt{\Delta n(\frac{K}{H} X_2, m)} + \sqrt{\Delta n(\frac{K}{H} X_1, m)}}{\sqrt{\Delta n(\frac{K}{H} X_2, m)} - \sqrt{\Delta n(\frac{K}{H} X_1, m)}}} \quad \dots (19)$$

あるいは $H_0 + D - P_{\infty} = \phi H$ と置くと取水量指数は

$$\frac{Q}{h \phi H} = \frac{2\pi}{\ln \frac{\sqrt{\Delta n\{\frac{K}{H}(D+R), m\}} + \sqrt{\Delta n\{\frac{K}{H}(D-R), m\}}}{\sqrt{\Delta n\{\frac{K}{H}(D+R), m\}} - \sqrt{\Delta n\{\frac{K}{H}(D-R), m\}}}} \quad \dots (20)$$

となる。

4. 領域の拡大

オ1種楕円積分(6)式において、母数が $m=0$ の時

$$Z = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1} t$$

$$\therefore t = \sin(Z, 0) = \sin Z \quad \dots (21)$$

となり、また母数が $m=1$ の場合

$$Z = \int_0^t \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}$$

$$t = \frac{e^{2Z} - 1}{e^{2Z} + 1} = \tanh Z$$

すなわち

$$t = \sin(Z, 1) = \tanh Z \quad (22)$$

となる。(16)より表-1の完全楕円積分を考慮し

楕円方向に無限に長い浸透層中に埋設され

に場合には

(14),(19)および

(21)式より

函数形 図-3 の記号	$\Delta n(Z, m)$	$\sin Z$	$\tanh Z$
H	K	$\pi/2$	∞
L	K'	∞	$\pi/2$
L/H	K'/K	∞	0
H/L	K/K'	0	∞

表-1

$$Q = \frac{2\pi h(H_0 + D - P_{\infty})}{(Y \rightarrow \infty) \ln \frac{\sqrt{\sin \frac{\pi}{2H}(D+R)} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{2H}(D-R)}}{\sqrt{\sin \frac{\pi}{2H}(D+R)} - \sqrt{\sin \frac{\pi}{2H}(D-R)}}} \quad (23)$$

となる。また縦方向に無限に長い浸透層中に埋設されに場合

$$Q = \frac{2\pi h(H_0 + D - P_{\infty})}{(X \rightarrow \infty) \ln \frac{\sqrt{\tanh \frac{\pi}{2L}(D+R)} + \sqrt{\tanh \frac{\pi}{2L}(D-R)}}{\sqrt{\tanh \frac{\pi}{2L}(D+R)} - \sqrt{\tanh \frac{\pi}{2L}(D-R)}}} \quad (24)$$

次に(23)式において浸透層の厚さ H が非常に大きい場合、 $\frac{\pi}{2H} X \ll 1$ であるから Maclaurin 級数で展開して整理すると、縦横方向に無限に広い領域をもつ浸透層の場合

$$Q = \frac{2\pi h(H_0 + D - P_{\infty})}{(X \rightarrow \infty, Y \rightarrow \infty) \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - R^2}}{R}} \quad \dots (25)$$

で表わされる。

5. 算定式の検討

一般に半無限領域における完全な円形を、ある境界をもつ領域に写像すると「回転と伸縮」作用をうけて歪んだ円形になる。このことから上記の半無限領域以外の領域で一つの sink に対する等ポテンシャル線群は円にならない。(16)よりこれらの等ポテンシャル線と実際の円形暗渠周辺の等

ポテンシャル線群は円とならない。しかし図-6に示すように浸透層と不浸透層の境界に接する完全な円形の暗渠と、互いに等ポテンシャル線を暗渠とした2種類を考え、それぞれの集水暗渠の中心を通る流線を実験により求めて暗渠の下半分から流入する流量を比較してみると、全流量のほぼ20%程度しかばいにめぐらなかつたが、図形のちがいにしてはそれほど大きな誤差は生じてないようで、(19)式とKirkham式との算定誤差に比べて無視できる程度と考える。また $H=L$ の領域における実験値と両式の計算式と図-4に示しているが(19)式とほぼ一致している。

次に半無限領域の等ポテンシャル線群はX軸を共軸とする完全な円群となり、円形暗渠周辺の等ポテンシャル線(円)と完全に一致するため、実際の円形暗渠の取水量の完全解がえられ、図-5に示すように実験結果ともよく一致している。

ところで(19)式の数値計算についてはJacobiの楕円関数表⁴⁾を使えば簡単に求まるし、あらかじめ計算図表を作っておいても便利であろう。またより高い精度を要求するならば関数表、(7)式および αn 関数の加法定理を使って計算することもできる。

6. おわりに

以上によって均一な透水性を持つ浸透層中に設置された集水暗渠について、暗渠断面を等ポテンシャル線とする場合の流入量を用いて取水量算定式を求めた。次いで電気モデルによる実験を行い、ここで求めた取水量算定式による計算値と実験値と比較検討し、よい結果がえられた。

終りに本研究は昭和42年度文部省科学研究費(各個研究)の援助を受けたことを記し謝意を表す。また実験に協力頂いた九大工学部水工土木科4年衣非安章君に感謝致します。

(参考文献)

- 1) Muskat: Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media.
- 2) Kirkham: Flow of ponded water into drain tubes in soil overlying an impervious layer, Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 30, 1949
- 3) 林 桂一: 高算関数表 岩波書店 P. 187
- 4) " : " P. 213

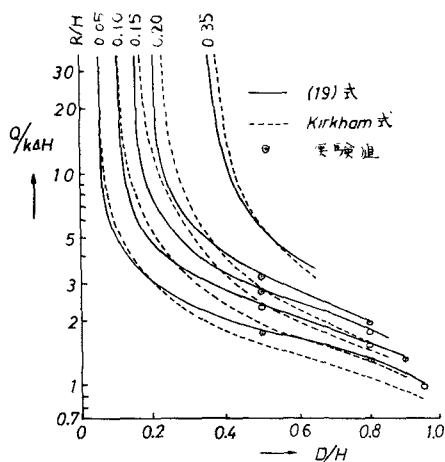


図-4 $H=L$ の領域における取水量

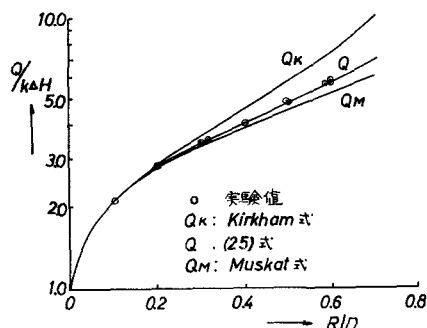


図-5 半無限領域における取水量

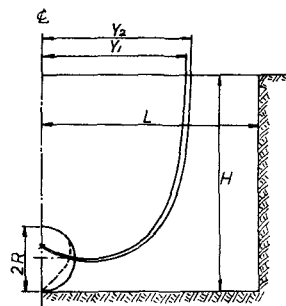


図-6
集水暗渠と流線