

1. まえがき 表題の内容については、22回年次講演会でも若干ふれたが、今般、解析結果と実際に数値計算する過程に多少の改良を行ない数値計算と実験とから理論の妥当性について検討を加えたのでその概要を発表する。なお、文献¹⁾でも言及してゐるように本研究は海岸付近の淡水湖の水位が低下した場合に地下塩水が淡水湖内に浸入してくる危険を地下塩水のポテンシャルを低下させて防止しようとする意図にはじめたものである。

図-1 流れの場 ($Z=x+iy$)

2. 解析 流れの場は図-1に示すように、一様

な透水性砂層の源部に算ポテンシャル面とみなされる粗層が存在し、流れは二次元定常の場合を考へる。図中の記号にしたがひ x, y の負方向の流れを u, v とし、速度ポテンシャルを ψ 、流線の関数を ϕ 、複素ポテンシャルを w とすれば

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, & v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ w &= \phi + i\psi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

また、流れの場の任意点における圧力を p とし、塩水に対する地盤の透水係数を k とすれば Darcy の法則により

$$u = k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\gamma_s} + y \right), \quad v = k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\gamma_s} + y \right) \quad (2)$$

したがつて (1) および (2) 式より

$$\phi = k \left(\frac{p}{\gamma_s} + y \right) \quad (3)$$

がえられる。次に浸塩境界面 (CD 線上) における諸種の物理量に添字 s を付してあらわすと

$$p_s = \gamma_s (H_s - y_s) \quad (4)$$

これを (3) 式に適用すると

$$\phi_s = k \frac{\gamma_s}{\gamma_s} H_s + k \epsilon_0 y_s, \quad \epsilon_0 = (H_s - y_s) / \gamma_s, \quad \epsilon_0 = \epsilon_1 / (1 + \epsilon_1) \quad (5)$$

となる。(5) 式によつて Zhukovsky 関数化を行なうと

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \phi - k \epsilon_0 y, & \Omega_2 &= \psi + k \epsilon_0 x \\ \Omega &= \Omega_1 + i \Omega_2 = w + i k \epsilon_0 z, & z &= x + iy \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

がえられる。流れの場に対して、 z, w および Ω の境界条件を整理すると表-1 がえられる。これによつて、 w および Ω を画けば図-2 および図-3 がえられる。これらの面上の特異点の値を

図-4 および図-5 に示すようにに之らば Schwarz

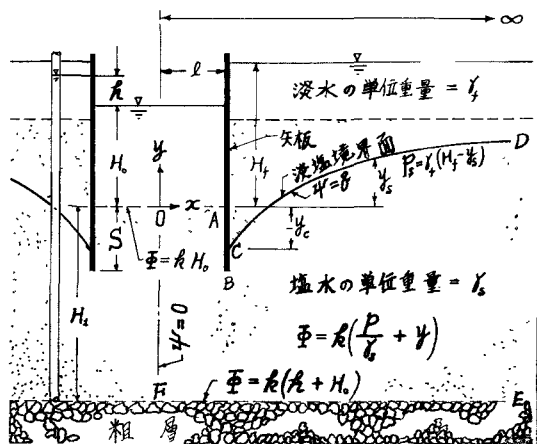


表-1. 境界条件

*印を付したものは const. $\epsilon_1 = \frac{\gamma_s - \gamma_0}{\gamma_0}$, $\epsilon_0 = \frac{\epsilon_1}{1 + \epsilon_1}$

境界値	$z = x + iy$	$w = \phi + i\psi$	$\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$
境界	x, y	$\phi = k \left(\frac{p}{\gamma_s} + y \right), \psi$	$\Omega_1 = \phi - k \epsilon_0 y, \Omega_2 = \psi + k \epsilon_0 x$
EF	$x^* = -H_1, y^* = H_1 + H_0$	$\psi^* = k(H_1 + H_0 + \epsilon_1 H_1)$	Ω_2
FO	$x^* = 0, y^* = 0$	$\phi^* = 0$	$\Omega_1, 0$
OA	$x^* = 0, y^* = k \cdot H_0$	$\psi^* = k \cdot H_0$	Ω_2
ABC	$x^* = l, y^* = 0$	$\phi^* = 0$	$\Omega_1, 8 + k \epsilon_0 l$
CD	x_s, y_s	$k \left(\frac{p_s}{\gamma_s} + y_s \right), 8$	$k \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} H_s, 8 + k \epsilon_0 x_s$

Christoffel の定理によつて w および Ω 面は t 面を媒介面として楕円積分

$$w = -N \int \frac{dt}{\sqrt{(-t) \sqrt{(1-t) \sqrt{(\frac{1}{\epsilon_1^2} - t)}}}} \quad (7)$$

$$\Omega = -M \int \frac{\sqrt{(\frac{1}{\epsilon_1^2} - t)} \cdot dt}{\sqrt{(-t) \sqrt{(1-t) \sqrt{(\frac{1}{\epsilon_1^2} - t)}} \sqrt{(\frac{1}{\epsilon_1^2} - t)}}} \quad (8)$$

で関係づけられる。ここに $\beta^2, \delta^2, \epsilon^2$ および $u, N,$

Mの値はWおよびΩ面の境界条件によって定まる定数であるがNとMについては解析過程における無次元化によって所要の各式から消去できるので基本的未知定数である β^2 , δ^2 および ε^2 の決定手順について実際の数値計算に便利なようにまとめている。

3. 未知定数の決定 まず以後の記述にあらわれる間数記号についてのべると

$$\left. \begin{aligned} F(\varepsilon, \theta) &= \int_0^\theta \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \alpha}}, \quad F(\varepsilon, \pi/2) = K(\varepsilon) \\ \Pi(-\varepsilon^2; \delta, \theta) &= \int_0^\theta \frac{d\alpha}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \alpha) \sqrt{1-\delta^2 \sin^2 \alpha}} \\ \Pi(-\varepsilon^2, \delta, \pi/2) &= \Pi_0(-\varepsilon^2, \delta) \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

さて、与えられた $\varepsilon_0 H_0/h$, ε_0/l および $\varepsilon_0 S/h$ についての β^2 , δ^2 および ε^2 の決定手順は、まず

$$1). \quad \delta/(hR) = K(\varepsilon)/K(\varepsilon') \geq \delta_0/h, \quad \varepsilon'^2 = 1 - \varepsilon^2 \dots (10)$$

を満足する ε^2 （ひいては流量 δ ）を仮定する。次にこの ε^2 を用いて

$$2). \quad \beta^2 = \frac{\delta^2 \left[\frac{(1+\varepsilon_0 \frac{H_0}{h}) \cdot \varepsilon'^2 \cdot K(\varepsilon')}{\delta'^2 K(\delta') + (\delta^2 - \varepsilon^2) \cdot \Pi_0(-\varepsilon'^2, \delta')} \right]^2 - \varepsilon^2}{\left[\frac{(1+\varepsilon_0 \frac{H_0}{h}) \cdot \varepsilon'^2 \cdot K(\varepsilon')}{\delta'^2 K(\delta') + (\delta^2 - \varepsilon^2) \cdot \Pi_0(-\varepsilon'^2, \delta')} \right]^2 - 1} \dots (11)$$

$$\delta'^2 = 1 - \delta^2$$

で $\beta^2 = 1$ （すなわち $\varepsilon_0 S/h = 0$ ）となる δ^2 の値 δ_{max}^2 を求める。この ε^2 と δ_{max}^2 とを

$$3). \quad \varepsilon_0 \frac{l}{h} = \frac{(1+\varepsilon_0 \frac{H_0}{h}) \cdot \delta'^2 \cdot \Pi_0(-\frac{\delta^2 \varepsilon^2}{\varepsilon'^2}, \delta)}{\delta'^2 K(\delta') + (\delta^2 - \varepsilon^2) \cdot \Pi_0(-\varepsilon'^2, \delta')} \cdot \frac{K(\varepsilon)}{K(\varepsilon')} \dots (12)$$

に適用してえられる $\varepsilon_0 l/h$ は与えられた $\varepsilon_0 l/h$ より多少なりとも小さくなければならぬ。なぜなら与えられた $\varepsilon_0 H_0/h$ および $\varepsilon_0 l/h$ の条件のもとで $\varepsilon_0 S/h = 0$ の状態は流量が最大の流れの場合であるから(12)式の右辺で計算される $\varepsilon_0 l/h$ が与えられたものより大きいときは仮定の流量が大きすぎたわけ、すなわち当初の ε^2 の仮定が大きすぎたわけであるからこの段階で ε^2 の仮定を当初の仮定より小さくして1)~3)の過程をくりかえさなければならぬ。この

図-2 $W = \Phi + i\psi$ 面

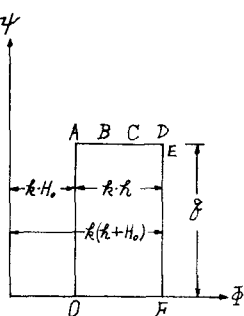


図-4. $t = \zeta + i\eta$ 面

(W面に対するもの)

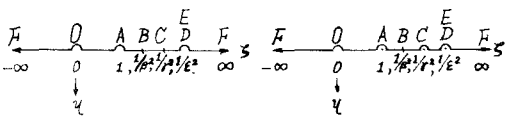


図-3 $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$ 面

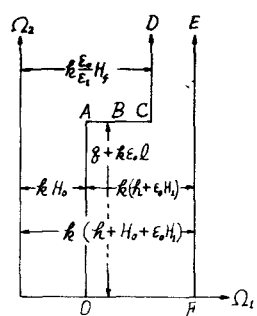


図-5. $t = \zeta + i\eta$ 面

(Ω面に対するもの)

ようにして(12)式の右辺で計算される $\varepsilon_0 l/h$ が与えられた $\varepsilon_0 l/h$ より多少なりとも小さくなるような δ_{max}^2 の値がわかったならば、次に δ^2 の値を δ_{max}^2 の付近から徐々に小さくしてゆくと(12)式の右辺で計算される $\varepsilon_0 l/h$ は徐々に大きくなり、ついに与えられた $\varepsilon_0 l/h$ に一致させることができる。このときの δ^2 および ε^2 を用いて改めて(11)式で β^2 を求めれば

$$4). \quad \sin^2 \theta_{a0} = \frac{\beta^2}{\gamma^2}, \quad \sin^2 \theta_{w0} = \frac{\beta'^2}{\varepsilon'^2}, \quad \beta'^2 = 1 - \beta^2$$

$$\varepsilon_0 \frac{S}{h} = \frac{(1+\varepsilon_0 \frac{H_0}{h}) \{ \varepsilon'^2 F(\varepsilon', \theta_{a0}) - (\delta^2 - \varepsilon^2) \Pi(-\frac{\delta^2 \varepsilon^2}{\varepsilon'^2}, \delta', \theta_{a0}) \}}{\delta'^2 K(\delta') + (\delta^2 - \varepsilon^2) \cdot \Pi_0(-\varepsilon'^2, \delta')} \cdot \frac{F(\varepsilon; \theta_{w0})}{K(\varepsilon')}$$

で $\varepsilon_0 S/h$ が計算される。これが与えられた $\varepsilon_0 S/h$ より小さければ $\varepsilon_0 H_0/h$ および $\varepsilon_0 l/h$ は与えられた値で $\varepsilon_0 S/h$ のみが与えられた値より小さくないと流し之はいような流量を仮定していったことになり流量の仮定が大きすぎたわけ、したがって仮定の ε^2 がまだ大きすぎたわけであるから、さらに ε^2 の仮定を小さくして1)~4)の手順をくりかえさなければならぬ。このようにして、与えられた $\varepsilon_0 H_0/h$, $\varepsilon_0 l/h$ および $\varepsilon_0 S/h$ について ε^2 , δ^2 および β^2 の各値を決定することができる。このとき、

$$\frac{\varepsilon_0 H_0}{\varepsilon_0 h} = \frac{(1 + \varepsilon_0 \frac{H_0}{h}) \{ \varepsilon^2 K(r') - (\varepsilon^2 \varepsilon^3) \Pi_0(-\varepsilon^2, r') \}}{r'^2 \cdot K(r') + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3) \cdot \Pi_0(-\varepsilon^2, r')} \dots (14)$$

において $\frac{\varepsilon_0 H_0}{\varepsilon_0 h} - \frac{H_0}{h} = \text{const.}$ となるがこのことは $\varepsilon_0 H_0/h$ および H_0/h のそれぞれの値が、この const. を保ったままでそれぞれ変化しても下層塩水の流れは相似であることを示してゐて合理的である。さて、次のような数値計算の結果、与えられた透水係数 k と水頭差 h のもとに、(10)式より流量 Q が決定される。このときに形成される淡塩境界面の曲線式について次にまとめておこう。

4. 淡塩境界面の曲線式 解析結果の無次元化の結果は次のように与えられた。すなわち

$$\frac{1}{2} \varepsilon^2 \leq \xi \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\sin^2 \theta_x = \frac{r'^2 - 1}{r'^2 (r'^2 - 1)}, \quad \sin^2 \theta_y = \frac{1}{r'^2} \left(\frac{r'^2 - 1}{r'^2} \right)$$

$$\varepsilon_0 \frac{H_0}{h} = \varepsilon_0 \frac{Q}{h} + (1 + \varepsilon_0 \frac{H_0}{h}) \cdot r'^2.$$

$$\left[\frac{\varepsilon^2 \sqrt{r'^2 - 1} \cdot \tanh^{-1} \left\{ \frac{\varepsilon r'}{\varepsilon^2 \sqrt{r'^2 - 1}} \cdot \frac{\tan \theta_x}{\sqrt{1 - r'^2 \sin^2 \theta_x}} \right\} \cdot \Pi \left(-\frac{r'^2 - 1}{\varepsilon^2}, r', \theta_x \right)}{r'^2 \cdot K(r') + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3) \cdot \Pi_0(-\varepsilon^2, r')} \right]$$

$$\varepsilon_0 \frac{H_0}{h} = - \left\{ \frac{\varepsilon_0 H_0}{\varepsilon_0 h} - \frac{H_0}{h} \right\} + \frac{F(\varepsilon^2, \theta_y)}{K(\varepsilon^2)}$$

....

.... (15)

時に、C 点の θ 座標は

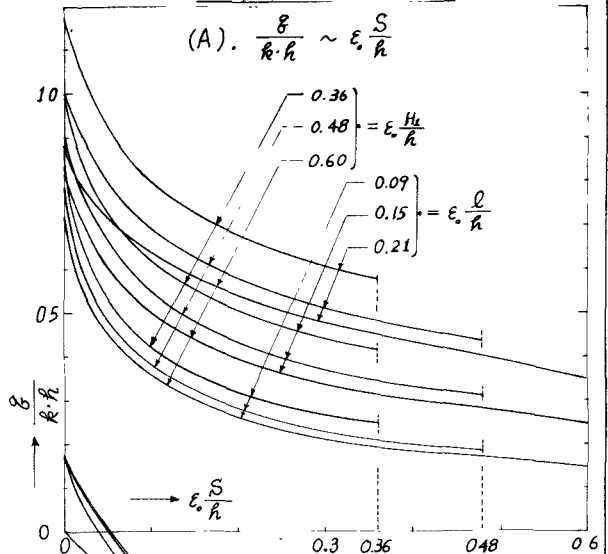
$$\sin^2 \theta_{yc} = \frac{r'^2}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon_0 \frac{H_0}{h} = - \left\{ \frac{\varepsilon_0 H_0}{\varepsilon_0 h} - \frac{H_0}{h} \right\} + \frac{F(\varepsilon^2, \theta_{yc})}{K(\varepsilon^2)} \dots (16)$$

となる。

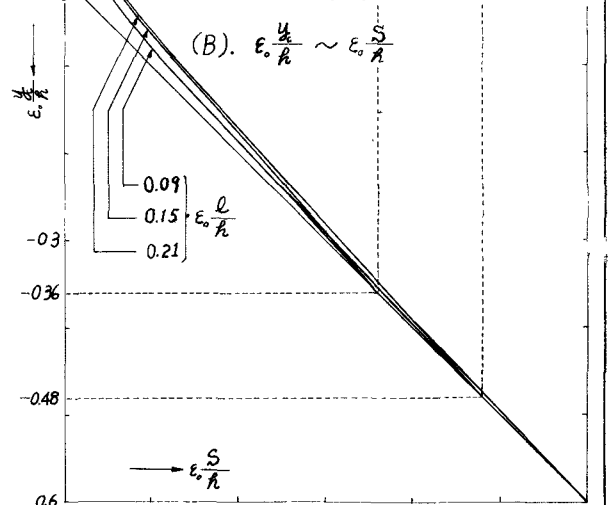
5. 数値計算および実験 主要な物理量を検討するため $\varepsilon_0 H_0/h$ および $\varepsilon_0 Q/h$ にそれぞれ3種の値を与え、これらの組合せについて $\varepsilon_0 S/h$ をいろいろに変化させて数値計算を行ない、このなかの数種の断面については砂模型による実験を行なった。数値計算では図-6 (A), (B) および (C) の結果が与えられた。これに若干の考察を加えてみよう。

図-6. $Q/h, \varepsilon_0 H_0/h \sim \varepsilon_0 S/h$

(A). $\frac{Q}{h} \sim \varepsilon_0 \frac{S}{h}$



(B). $\varepsilon_0 \frac{H_0}{h} \sim \varepsilon_0 \frac{S}{h}$



(C). $\varepsilon_0 \frac{H_0}{h} - \frac{H_0}{h} \sim \varepsilon_0 \frac{S}{h}$

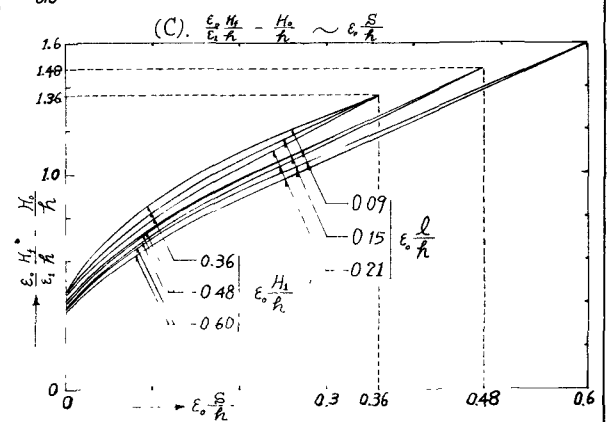
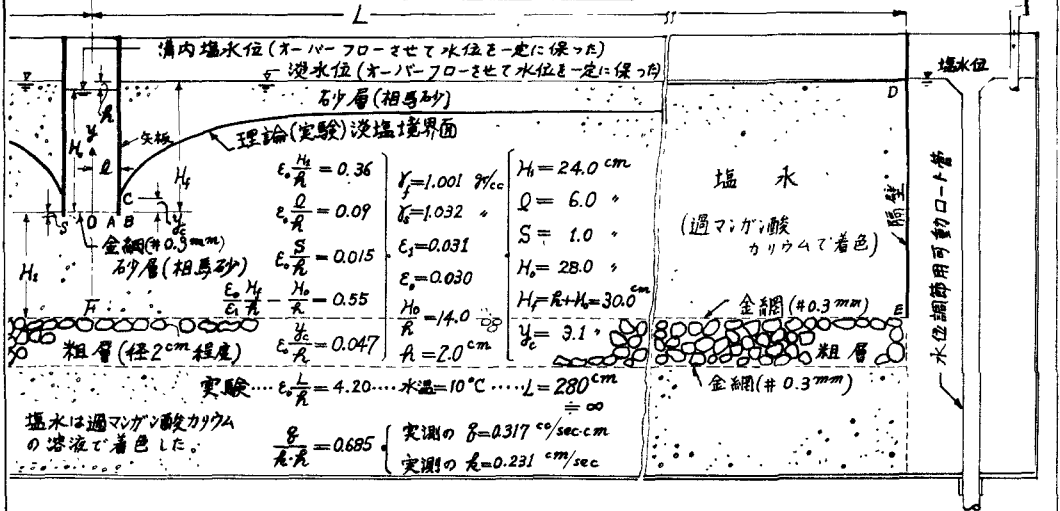


図-7. 実験結果および装置略図



1) $\delta/(R \cdot R)$ につて... $E_1 H_1/R$ および $E_2 Q/R$ を一定にすると $E_3 S/R$ の小さいところでは $E_3 S/R$ が増加すると急激に小さくなる。 $E_1 H_1/R$ および $E_3 S/R$ を一定にすると $E_2 Q/R$ が大きくなるとほぼ直線的に大きくなる。また、 $E_2 Q/R$ および $E_3 S/R$ を一定にすると $E_1 H_1/R$ が大きくなると小さくなる。

2). $E_4 H_2/R$ につて... $E_1 H_1/R$ および $E_2 Q/R$ を一定にすると $E_3 S/R$ が小さいところでは C は Y の正側にあるか $E_3 S/R$ が大きくなるにつれて Y の負側にうつり下つてゆく。 $E_1 H_1/R$ および $E_3 S/R$ を一定にすると $E_2 Q/R$ が小さくなると若干小さくなるようである。また、 $E_2 Q/R$ および $E_3 S/R$ を一定にして $E_1 H_1/R$ を変化させても C はほとんど動かないようである。

3). $\frac{E_1 H_1}{E_0 R} - \frac{H_0}{R}$ につて... $E_1 H_1/R$ および $E_2 Q/R$ を一定にすると $E_3 S/R$ が大きくなるとほぼ直線的に大きくなる。 $E_1 H_1/R$ および $E_3 S/R$ を一定にすると $E_2 Q/R$ が大きくなると小さくなる。また、 $E_2 Q/R$ および $E_3 S/R$ を一定にすると $E_1 H_1/R$ が大きくなると小さくなる。

次に、実験の一例を図-7に示しているが、これによると浸塩境界面は理論と実験とがほとんど一致し、また、流量についても実測の流量を(10)式

に適用して逆算された透水係数の値が他の断面についての実験の場合とほぼ一致した値であることから理論が妥当であることがわかる。なお、図-7に示す L が有限な場合、底層(EF面下)が不透水層である場合についても解析を終り、目下、数値計算および実験によって検討を進めているのでこれについても発表の機会をえたいと思っている。

最後に、数値計算および実験と手伝ってもらった九州産業大学土木教室 有吉孝一君に感謝申上げる。また、本研究には文部省各個研究費および九州産業大学特別研究費の援助を受けた。謝意を表する。

参考文献

- 1) 上田・崎山 ; 地下塩水汲上げによる浸塩境界面の低下。土木学会年次学術講演会 講演概要 II-38 (昭42.5)
- 2) 上田・崎山 ; 海水飽和地盤における淡水注入溝の浸透。土木学会論文集 135号 (昭41.11)
- 3) M-E Hare ; Ground water and Seepage McGraw-Hill Book Co (1962)