

## 1. まえがき

一般に微小変形理論に対する有限変形理論とは広い意味で非線形ひずみあるいは非線形応力を考慮する力学理論のことであり、この内容を大別すれば(1). 力学的に非線形で幾何学は線形(2). 幾何学的に非線形で力学的に線形(3). 力学的にも幾何学的にも非線形のものに分類される。(2)はいわゆる Large Deformation 理論の範疇に属し、(1)(3)を対象とする場合にはひずみが材料の比例限界を越えているので塑性理論を適用すべきである。

本研究は C. Oran<sup>(1)</sup>の有限変形に対する補正エネルギー理論に塑性概念を導入して上述の(1)(2)(3)のいずれにも適用できる一般理論の確立を試みたものである。

## 2. 基礎理論

### (1) 補正エネルギーの定義

変位成分を  $u_n$ 、構造物の変形形状に独立な集中力を  $P_n$  とするとき

$$u_n = \frac{\partial C}{\partial P_n} \quad (2.1)$$

の関係をただ一つの条件とする関数  $C = C(P_1, P_2, \dots, P_N; r_1, r_2, \dots, r_T)$  を考える。ただし  $r_1, \dots, r_T$  は温度変化、支点沈下あるいは部材の不整合などによる変形成分で、以後初期ひずみと呼ぶ。

こゝで構造物の変形過程を二段階あるわ初期ひずみだけの過程と外力が加わった過程に分けて考える。ひずみエネルギー  $U$  は初期ひずみと外力の関数であるが、第2段階の変形においてはひずみエネルギーの増分は外力  $P_n$  だけの関数となり次式で与えられる。

$$dU = \sum_{n=1}^N P_n du_n \quad (2.2)$$

こうして、初期ひずみをコンスタントなパラメーターと見做すことができる。それゆえ式(2.1)、(2.2)より

$$dC = \sum_{n=1}^N u_n dP_n = \sum_{n=1}^N d(P_n u_n) - \sum_{n=1}^N P_n du_n = \sum_{n=1}^N d(P_n u_n) - dU \quad (2.3)$$

すなわち

$$dC = \sum_{n=1}^N d(P_n u_n) - dU \quad (2.4)$$

両辺を積分して

$$C = \sum_{n=1}^N P_n u_n - U + B(r_1, r_2, \dots, r_T) \quad (2.5)$$

ここに、 $B(r_1, r_2, \dots, r_T)$  は任意の  $r_i (i=1, 2, \dots, T)$  の関数である。

式(2.1)より外力に関する導関数だけが  $u_n$  の関係量なので、 $B(r_1, r_2, \dots, r_T)$  は 0 となる。

それゆえ式(2.5)は

$$C = \sum_{n=1}^N P_n u_n - U \quad (2.6)$$

この  $C$  を補正エネルギーと定義する。式(2.6)には初期ひずみは表われていないが、ひずみエネルギー  $-U$  と変位成分  $u_n$  は初期ひずみの関数なので  $C$  は初期ひずみの関数である。

### (2). 部材要素に対する補正エネルギー

構造物の任意部材を取り出し、これを適当な数に分割する。この分割部材のうち、 $k$ 番目の要素に対して式(2.6)を適用すれば次式が成立する。

$$C_k = \sum_i Q_{ki} g_{ki} - U_k \quad (2.7)$$

$$\text{ただし} \quad \begin{cases} Q_{ki} : \text{要素に働く力(外力, 内力, 支点反力)} \\ g_{ki} : \text{変形成分} \\ U_k : \text{要素のひずみエネルギー} \end{cases}$$

部材要素の補正エネルギーは

$$\sum_k C_k = \sum_k \sum_i Q_{ki} g_{ki} - \sum_k U_k = \sum_n P_n u_n + \sum_e R_e r_e - U \quad (2.8)$$

ここに  $R_e$  は初期ひずみによる復元力である。部材の補正エネルギーが部材要素の補正エネルギーの和と復元力によるエネルギーの和として表わされる。すなわち

$$C = \sum_k C_k - \sum_e R_e r_e \quad (2.9)$$

### (3) 適合条件

部材の隣接要素間、あるいは要素と支点の間を適当に分割し、不静定量を取り除いた系を考えこれを基本系とする。ここで初期ひずみ  $r_1, r_2, \dots, r_e$  と外力  $P_1, P_2, \dots, P_N$  を受ける部材を考え、この部材の変形は次の段階をとるものとする。

(i). まず、基本系の部材要素と支点に初期ひずみが生じ、モーメント適合条件のいくつかが満足されなくなる。

(ii). 次に外力が加わりすべてのモーメント適合条件が満足されなくなる。

(iii). 等大反対の内力を部材要素の両端に与える。

初期ひずみ、外力および内力により生じた  $X_1, X_2, \dots, X_M$  に対応する変形成分を  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_M$  と示せば適合条件は

$$\chi_m = 0 \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.10)$$

### (4) 任意形曲線ばりの補正エネルギー

任意形曲線ばりの微小要素  $ds$  が初期ひずみおよび外力を受けて最終平衡状態にあるものとする。このとき微小要素  $ds$  のひずみエネルギーは

$$dU = U_0 ds \quad (2.11)$$

ここに  $U_0$  はばりの単位長さあたりのひずみエネルギー密度で曲率および垂直ひずみを独立変数とする関数である。この  $U_0$  は一般に次の式を積分することによりえられる。

$$dU_0 = M(d\tau + \epsilon d\tau + \tau d\epsilon) + T d\epsilon \quad (2.12)$$

微小要素  $ds$  の平衡条件は図-1 により次の式で求められる。

$$dV + p ds = 0 \quad (2.13)$$

$$dH + g ds = 0 \quad (2.14)$$

$$dM - (V \cos \theta - H \sin \theta)(1 + \epsilon) ds = 0 \quad (2.15)$$

また補正エネルギーは式(2.7)により

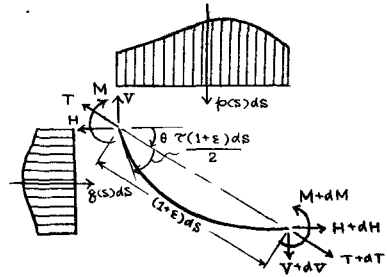


図-1

$$dC = M \left[ \theta + \frac{\tau(1+\varepsilon)}{2} d\theta - \theta^0 - \frac{\tau^0(1+\varepsilon^0)}{2} d\theta \right] + (M+dM) \left[ -\theta + \frac{\tau(1+\varepsilon)}{2} d\theta + \theta^0 - \frac{\tau^0(1+\varepsilon^0)}{2} d\theta \right] \\ + V[(1+\varepsilon)\sin\theta - (1+\varepsilon^0)\sin\theta^0] d\theta + H[(1+\varepsilon)\cos\theta - (1+\varepsilon^0)\cos\theta^0] d\theta - U_0(M, T) d\theta \quad (2.16)$$

ここに有る  $0, 1$  はそれぞれはりの無ひずみ、無応力状態および分布初期ひずみを受けた状態を示す。高次の微小項を消去して

$$dC = C_0 d\theta \quad (2.17)$$

$$C_0 = M \left[ \tau(1+\varepsilon) - \tau^0(1+\varepsilon^0) \right] + \frac{dM}{d\theta} (-\theta + \theta^0) + V[(1+\varepsilon)\sin\theta - (1+\varepsilon^0)\sin\theta^0] \\ + H[(1+\varepsilon)\cos\theta - (1+\varepsilon^0)\cos\theta^0] - U_0(M, T) \quad (2.18)$$

$\tau^0, \varepsilon^0$  の分布初期ひずみの他に支点沈下などの有限の初期ひずみがあり、これに対応する復元力を  $R_0$  と表せば部材要素全体の補正エネルギーは結局次式で与えられる。

$$C = \int_0^L C_0 d\theta + \int_0^L C'_0 d\theta - \sum R_0 \theta_T \quad (2.19)$$

$$C'_0 = M \left[ \tau^0(1+\varepsilon^0) - \tau^0 \right] + V\varepsilon^0 \sin\theta^0 + H\varepsilon^0 \cos\theta^0$$

ただし  $L$  ははりの長さ

### (5). 弾塑性補正エネルギー

図-2に示す  $M-\tau$  曲線の特徴型部分をエネルギー等置法

により2直線で線型近似する。すなわち

$$\int_0^M \tau dM = \frac{M^2}{2EI} + k_1 \frac{(M-M_{YI})^2}{2EI} + k_2 \frac{(M-M_{YII})^2}{2EI}$$

$$M_{YI} = (1-n)M_Y, \quad M_{YII} = (1+n-2n^2)M_Y$$

ここに  $M_Y$ : 単純曲げによる降伏モーメント

$M_{YI}$ : 弾性降伏時のモーメント

$M_{YII}$ : 断面の両縁が降伏するモーメント

$n$ : 無次元化した弾力

$$k_1 = K_1 - 1, \quad k_2 = K_2 - K_1, \quad K_1 = 1/(1-n), \quad K_2 = 4(1+n^2)/(1-n)^3$$

式(2.19)と式(2.20)より弾塑性補正エネルギー式が求められる。

### 3. 適用例

初期ひずみがなく、非伸縮性の直線ばりを対象とする場合には  $\theta^0 = \varepsilon = \varepsilon^0 = \tau = \tau^0 = 0$  となり式(2.18)

は

$$C_0 = M \tau - \frac{dM}{d\theta} \theta + V \sin \theta + H(\cos \theta - 1) - U_0 \quad (3.1)$$

ここに  $U_0$  は  $M$  だけの関数となり、式(2.12)を積分して

$$U_0 = M \tau - \int_0^M \tau dM \quad (3.2)$$

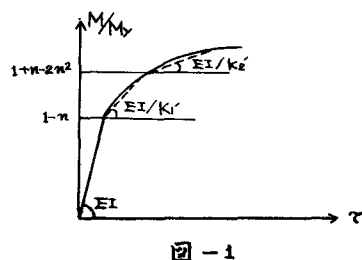
すなわち、要素の弾塑性補正エネルギーは次式で与えられる。

$$C_0 = \int_0^M \tau dM - \frac{dM}{d\theta} \theta + V \sin \theta + H(\cos \theta - 1) \\ = \frac{M^2}{2EI} + k_1 \frac{(M-M_{YI})^2}{2EI} + k_2 \frac{(M-M_{YII})^2}{2EI} - \frac{dM}{d\theta} \theta + V \sin \theta + H(\cos \theta - 1) \quad (3.3)$$

変形が微小なとすると  $\cos \theta \cong 1, \theta \cong \sin \theta \cong 0$  となるから、 $C_0 = \int_0^M \tau dM$  微小変形理論による補正エネルギーと一致する。さらに弾性域、すなわち  $M-\tau$  関係が線型だとすると  $\tau = EI/M$  となり  $C_0$  は

$$C_0 = \frac{M^2}{2EI} \quad (3.4)$$

これは通常の弾性理論と一致する。式(3.3)で一般表示された各要素の補正エネルギーを用いて式(2.15)の平衡方程式と式(2.10)の適合条件式よりえられる応力と変形成分に関する連立方程式を解けばよく、



このフローチャートを図-3に示す。

#### 4. 数値計算例

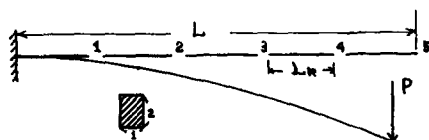


図-4

図-4に示す矩形断面片持ばりの計算例を以下に述べる。平衡方程式は式(2.15)より

$$\cos \theta_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{PL_i} \quad (4.1)$$

適合条件式は式(2.10)より

$$\frac{\partial C}{\partial M_i} = 0 \quad (4.2)$$

この例ではばりを5等分しているので  $M_i, \theta_i$  を未知数とする10元の連立方程式を解くことになる。この計算結果を微小変形理論と比較して図-5、図-6にグラフ表示した。グラフ中の  $p$  は弾性限界荷重である。

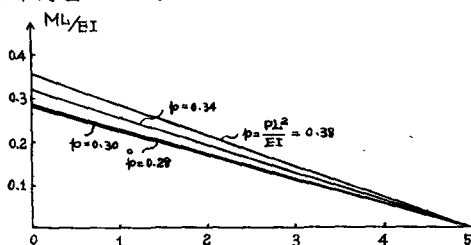


図-5 モーメント分布

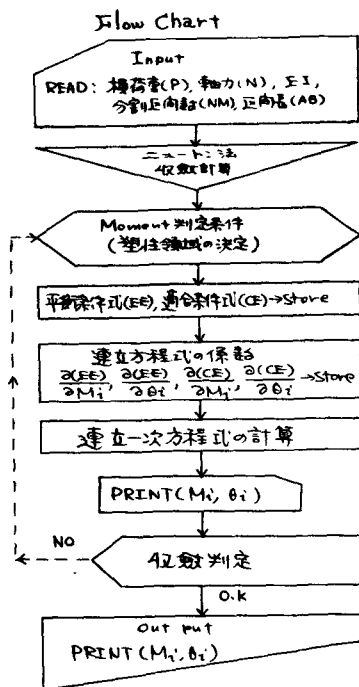


図-3

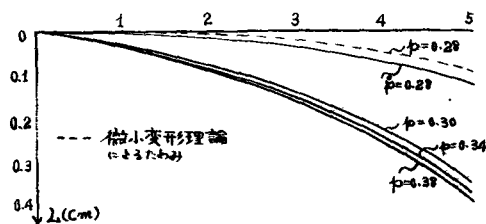


図-6 たわみ曲線

#### 5. あとがき

在来の解法では極めて煩雑となる有限変形に関する諸問題が本解法によれば塑性領域を含め、任意形状部材に対して同一手法で容易に解け、弾塑性領域での応力変移と変形状が明らかになる。例えば図-6より荷重が弾性限界を越えるとたわみは急激に約3倍に増加し、その後漸増することか認められる。

#### 参考文献

- (1) Ceneç Özen : Complementary Energy Concept for large deformations  
Journal of the S.D. Proc of the A.S.C.E Feb. 1967.
- (2) 山崎太田 後藤 : 一定軸力と漸増曲げモーメントを受ける連続1本の弾塑性解析  
才21回 土木学会年次学術講演会概要 才1部 昭和41年5月