

I-17 水平荷重によるラーメンの動的弾塑性解析

九州大学 正員 山崎徳也
 〃 学生員 〇黒木健実

1. 序言

ラーメンの動的挙動は、ラーメンを構成する柱とはりの力学的性状、基礎の支持条件、動的荷重の種類およびその載荷位置などによって異なり、したがってその崩壊形式も一様ではない。しかしながら基礎の支持条件を固定とすれば崩壊形式は大別して

(1) 柱頭または柱脚に塑性ヒンジが発生し、何本かの柱にそれが完成したとき崩壊する形式

(2) はりの端部に塑性ヒンジが発生し、はりの端部の何方所かにそれが完成したとき崩壊する形式が考えられる。

本論文は著者のラーメンの動的弾塑性解析に関する研究の予報として、上記(1)の崩壊形式を有するラーメン、すなわちはりの曲げ剛性が柱のそれら比し大で近似的にはりを剛体と見做しうるラーメンの水平荷重による動的挙動を明確にすべく、ラーメンを多質点系に置換して取り扱い解析法を提示するものである。

2. 弾性時

はりを剛体と見做しうるラーメンの節々に水平荷重が作用する場合、各節々の水平変位は柱の変形のみによって生じ、荷重がある限度以上に増加すれば柱頭および柱脚に塑性ヒンジが発生してラーメンは崩壊に至る。かかるラーメンの解析を容易にするために図-1に示すモデルを導入する。すなわち対象とするラーメンを、各部材が剛棒で構成され、かつ柱頭および柱脚には図-2のごとき水平移動を可能ならしめるばねを有するモデルに置換する。なお、柱の質量に関しては柱頭および柱脚にそれぞれその $1/2$ が集中するものと考ええる。

ばね定数の決定

仮定によりはりは剛体と見做しうるから各柱は両端固定である。よって置換前の任意の柱を取出して、これに単位の部材角を与えると柱に貯えられるポテンシャルエネルギーが次式で表わされる。

$$\frac{6EI}{h} \cdot 1^2 \quad (1)$$

ただし EI : 曲げ剛性, h : 柱の高さ

同様にして置換後の柱が有するポテンシャルエネルギーを求めると次式となる。

$$K \cdot 1^2 \quad (2)$$

よって式(1)、(2)を等置すれば、ばね定数が次のごとく求められる。

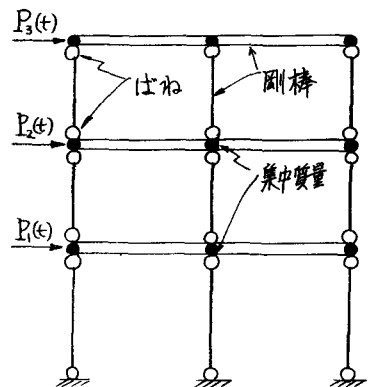
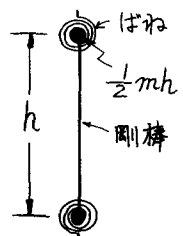


図-1



m : 柱の単位長さ当たりの質量

図-2

$$K = \frac{6EI}{h} \quad (3)$$

ここにばねを理想弾塑性体と仮定して曲げモーメント M —部材角 R 関係を図示すると図-3のごとくである。

弾性時判別式および曲げモーメント 時刻 t においてばねは弾性で、 $M-R$ 関係が AD, BC, FE 上 ($E, D, C, A, B, C, D, E, F$ 英は含まない) のいずれかにあると仮定すれば、時刻 $t-t_0$ においても弾性であるように微小時間 Δt をとることができる。そうすると時刻 $t-t_0$ から t までの微小時間における塑性部材角の変化量は 0 となり、時刻 t における塑性部材角は時刻 $t-t_0$ における塑性部材角に等しくなる。すなわち

$$R^p(t) = R^p(t-t_0) \quad (4)$$

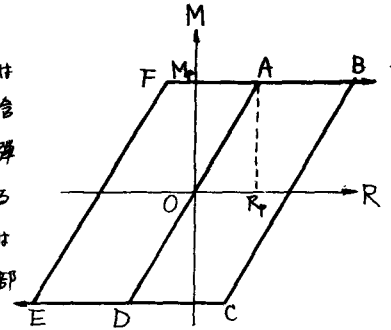


図-3

一方、部材角は弾性部材角 R^e と塑性部材角 R^p の和として表わされるゆえ常に次式が成立する。

$$R(t) = R^e(t) + R^p(t) \quad (5)$$

$K R^e(t)$ がこのときの曲げモーメント $M(t)$ で、式(5)に式(4)を代入し、しかる後両辺に K を掛けて整理すれば $M(t)$ が次のごとく求められる。

$$M(t) = K R(t) - K R^p(t-t_0) \quad (6)$$

式(6)の曲げモーメントの絶対値は当然動的塑性曲げモーメント M_p より小さいゆえ次式が成立する。

$$|M(t)| = |K R(t) - K R^p(t-t_0)| < M_p \quad (7)$$

式(7)が弾性時の判別式で、この式が成立するとき曲げモーメントは式(6)で与えられることとなる。

運動方程式および水平変位の算定式 n 層間剛性ラメンが有するポテンシャルエネルギー U を曲げモーメントで表わせば次式となる。

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j M_{ij}^2}{j K_{ij}} \quad (8)$$

ただし $j K_{ij}$ および $j M_{ij}$ はそれぞれ i 層 j 層目の柱のはり定数および曲げモーメントである。

一方、 i 層のはりの重量および i 層に集中する柱の重量を一括して W_i 、速度を $\dot{x}_i$ とおけば、ラメン全体の運動エネルギー T は次のごとく簡単な式となる。

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{W_i}{g} \dot{x}_i^2 \quad (9)$$

よって式(8), (9)を Lagrange の方程式に適用すれば次式がえられる。

$$\frac{W_i}{g} \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{n+1} \left[\frac{2 j M_{ij}}{j K_{ij}} \frac{\partial j M_{ij}}{\partial x_i} + \frac{2 j M_{i-1,j}}{j K_{i-1,j}} \frac{\partial j M_{i-1,j}}{\partial x_i} \right] = P_i \quad (10)$$

ここで i 層の部材角 R_i が i 層および $i-1$ 層の水平変位の差として

$$R_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{h_i} \quad (11)$$

で表わされることを考慮すれば、式(6), (10)より所要の運動方程式が次のごとく求められる。

$$\frac{w_i}{g} \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{n+1} \left[\frac{2_j M_c}{h_c} - \frac{2_j M_{c+1}}{h_{c+1}} \right] = P_i \quad (12)$$

式(12)より各層の水平変位の算定式がえられるが、その手法は次のごとくである。まず式(12)に初期条件 $M(0) = 0$ を適用すると、動的荷重載荷時の加速度 $\ddot{x}(0)$ がえられ、載荷後の微小時刻 t の水平変位は次式で与えられる。

$$x_i(t) = \frac{t^2}{2} \frac{g}{w_i} P_i(0) \quad (13)$$

次いで式(12)を差分方程式に変換して、時刻 $t+\tau$ における水平変位 $x_i(t+\tau)$ について整理すれば式(14)をうる。

$$x_i(t+\tau) = \frac{t^2}{2} \frac{g}{w_i} \sum_{j=1}^{n+1} \left[\frac{2_j M_c(t)}{h_c} - \frac{2_j M_{c+1}(t)}{h_{c+1}} \right] + \frac{t^2}{2} \frac{g}{w_i} P_i(t) + 2x_i(t) - x_i(t-\tau) \quad (14)$$

3. 塑性時 塑性時判別式および塑性部材角

(i) $M-R$ 関係がFB上にある場合 曲げモーメントは一定値 M_p をとり、塑性部材角が増加する。いま、時刻 $t-\tau$ から t までの塑性部材角の増加量を $\Delta R^p(t-\tau)$ とおくと、時刻 t における塑性部材角 $R^p(t)$ は次式で表わされる。

$$R^p(t) = R^p(t-\tau) + \Delta R^p(t-\tau) \quad (15)$$

一方式(5)は、この場合 $R^e(t) = R_p$ (ただし R_p は M_p に対応する部材角) であるから

$$R(t) = R_p + R^p(t) \quad (16)$$

となる。よって式(16)に式(15)を代入し、しかる後両辺に K を掛ければ $\Delta R^p(t-\tau)$ が次のごとく求められる。

$$\Delta R^p(t-\tau) = \frac{1}{K} \left[KR(t) - KR^p(t-\tau) + M_p \right] \quad (17)$$

次いで $\Delta R^p(t-\tau) \geq 0$ なることを考慮すれば $R(t) \geq R^p(t-\tau)$ が成立し、この式を式(16)に適用すると次の関係式がえられる。

$$R(t) \geq R_p + R^p(t-\tau) \quad (18)$$

したがって $M-R$ 関係がFB上にある場合の判別式は次式で与えられることとなる。

$$KR(t) - KR^p(t-\tau) \geq M_p \quad (19)$$

(ii) $M-R$ 関係がCE上にある場合 この場合は曲げモーメントは $-M_p$ となり、塑性部材角は減少する。したがって $R^e(t) = -R_p$, $\Delta R^p(t-\tau) \leq 0$ を用い、(i)と同様にして $\Delta R^p(t-\tau)$ および判別式を求めると式(20), (21) をうる。

$$\Delta R^p(t-\tau) = \frac{1}{K} \left[KR(t) - KR^p(t-\tau) + M_p \right] \quad (20)$$

$$KR(t) - KR^p(t-\tau) \leq -M_p \quad (21)$$

運動方程式および水平変位の算定式 ばねが塑性のとき、ばねには塑性ヒンジが形成され、一定の曲げモーメントの下に部材角が変化する。かかる状態のばねはポテンシャルエネルギー $= \text{const}$ で、外力モーメント M_p (または $-M_p$) が作用しているヒンジと見做しうるゆえ、例えば $M_c = M_p$ なるときは式(10)の Lagrange の方程式において $\partial M_c / \partial x_i = 0$ となるが、一般力として弾性時と共通な $P_i = -2M_p/h_c$ が加味されるので、塑性時の運動方程式は弾性時のそれと合致する。したがって塑性時の水平変位の算定式もまた式(14)で表わされることとなる。

ここに弾性時および塑性時の基本式を要約し、解法の手順を述べれば次のとおりである。

	弾 性 時	塑 性 時	
判別式	$ KR(t) - KR^p(t-\tau) < M_p$	$KR(t) - KR^p(t-\tau) \geq M_p$	$KR(t) - KR^p(t-\tau) \leq -M_p$
曲げモーメント	$M(t) = KR(t) - KR^p(t-\tau)$	$M(t) = M_p$	$M(t) = -M_p$
塑性部材角 の変化量	$\Delta R^p(t-\tau) = 0$	$\Delta R^p(t-\tau) = \frac{1}{K} [KR(t) - KR^p(t-\tau) - M_p]$	$\Delta R^p(t-\tau) = \frac{1}{K} [KR(t) - KR^p(t-\tau) + M_p]$

弾性時・塑性時に共通な式

塑性部材角 $R^p(t) = R^p(t-\tau) + \Delta R^p(t-\tau)$

水平変位 $X_i(t+\tau) = -\tau^2 \frac{g}{2c} \sum_{j=1}^{n+1} \left[\frac{2jM_{ij}(t)}{h_{ci}} - \frac{2jM_{ij}(t)}{h_{ci+1}} \right] + \tau^2 \frac{g}{2c} P_i(t) + 2X_i(t) - X_i(t-\tau)$

部材角 $R_i(t) = \frac{X_i(t) - X_{i-1}(t)}{h_{ci}}$

まず式(3)より荷重載荷後の微小時刻 τ における各層の変位を求め、次いで部材角を算定する。それ以後は次に列記する順序で繰返し演算を行なうのみで各時刻における曲げモーメント、塑性部材角および水平変位が算出可能となる。

(1)判別式を用いて弾性時・塑性時の判別をする。

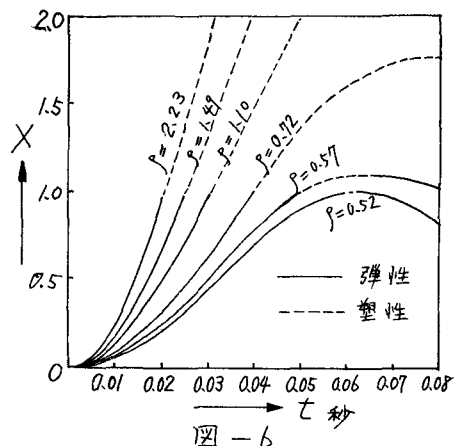
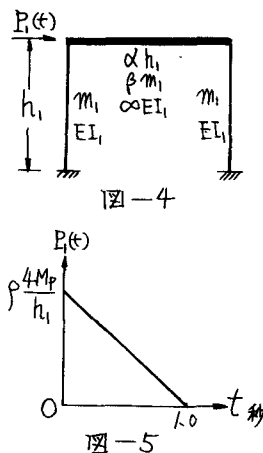
(2)曲げモーメント、塑性部材角の変化量および塑性部材角を計算する

(3)(2)の結果を用いて次の時刻の水平変位を求め、これを部材角に変換する

4. 数値計算

図-4のラーメンに図-5に示す動的荷重を作用させ、 β をパラメータとして計算を行なった。ただし $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $I_1=1.07 \times 10^4 \text{ cm}^4$, $m_1 g = 0.713 \text{ kg/cm}$, $h_1 = 400 \text{ cm}$, $\alpha\beta = 3$

図-6が水平変位-時間曲線で、変位は静的降伏変位で除して無次元化したものである。



5. 結語

本研究は、はり柱に較べて剛体と見做しうるラーメンに動的水平荷重が作用する場合の弾塑性解析法を提案したもので、本法によればさらに衝撃荷重および水平地動を考慮した解析も可能となる。なお、数値計算においては安全性の尺度として、最大部材角 R_{max} と降伏部材角 R_y の比、いわゆる ductility factor (延性率)の決定が問題となるが、これについては各種構造材料の実験結果や安全率とを考慮して決定されるべきものといえる。