

九州大学 正員 山崎徳也

福岡建設コンサルタント正員 須藤 実

九州大学 学生員 石川信隆

1. 緒言 著者らは先に一定曲げと漸増軸力を受ける連続はりの弾塑性安定限界について論じたが、ここでは一定軸力と漸増曲げを受ける鋼構造骨組の弾塑性挙動に対する究明を試みるものである。既にかかる研究は、R. H. Wood²⁾および坂本宮村らなど数多くの人によって行われ、なかでもR. H. Woodは幾つかの数値解析例によって塑性域における骨組の不安定現象が最終耐力に及ぼす影響を検討している。本研究は上記諸研究とは異なり、まず弾塑性域における曲げモーメント(M)-軸力(N)-曲率(ϕ)関係のNを一定としてM- ϕ 曲線をM- ϕ 近似直線と置換し、ついで片持ばりの弾塑性挙動に関する基本的考察を行い、さらに一定軸力と漸増曲げを受ける部材の弾塑性たわみ角式を導くと共に、かかるラーメンの弾塑性解析法の確立を企図するものである。

なお、本論文とは文献(1)と同様の仮定を用いる。

2. 基本的考察

(1) M- ϕ 近似直線 軸力Nを一定としたときのM- ϕ 曲線を図-1のごとく直線で近似し、 ϕ_1 , ϕ_2 近似直線の勾配をそれぞれ EI/κ'_1 , EI/κ'_2 とすれば、弾性、 ϕ_1 および ϕ_2 弾塑性域における曲率 ϕ はそれぞれ次式のごとく表わされる。

$$i) \text{弾性: } \phi_2 = M/EI \quad \dots (1)$$

$$ii) \text{第1弾塑性: } \phi_1 = \kappa'_1(M - M_k)/EI + \phi_2 \quad \dots (2)$$

ただし $\phi_2 = M_k/EI$, $M_k = (1 - \eta)M_y$, $\eta = N/N_y$, M_y : 純曲げによる降伏曲げモーメント,
 N_y : 軸力のみによる全断面降伏力

$$iii) \text{第2弾塑性: } \phi_2 = \kappa'_2(M - M_k)/EI + \phi_1 \quad \dots (3)$$

ただし $\phi_1 = \kappa'_1(M_k - M_k)/EI + \phi_2$, $M_k = (1 + \eta - 2\eta^2)M_y$

ここで、式(2),(3)のM- ϕ 近似直線の勾配を規定する κ'_1 および κ'_2 はイネルギー等置法によって決定され、矩形断面では次値となる。

$$\kappa'_1 = 1/(1 - \eta), \quad \kappa'_2 = 4(1 + \eta^2)/(1 - \eta)^3 \quad \dots (4)$$

(2) Cantileverの弾塑性挙動

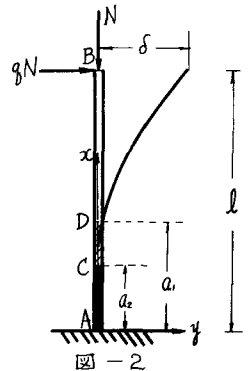
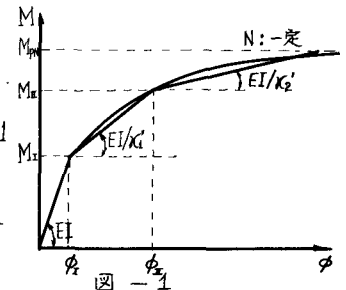
図-2に示すときCantileverのB端に一定軸力Nおよび漸増水平力 qN が作用するときの弾塑性解析を行えば以下のごとくである。

まず任意点の曲げモーメントMはたわみによる付加曲げモーメントを考慮して次式で表わされる。

$$M = -\{N(\delta - y) + qN(l - x)\} \quad \dots (5)$$

ついで変形を微小と考えれば $dx^2/d^2y = \ddot{y} = -\phi$ が成立するゆえ、式(1)~(3)と式(5)とを用うれば、弾性(D~B), 第1弾塑性(C~D)および第2弾塑性(A~C)の各領域における微分方程式ならびにたわみとたわみ角がそれぞれ次式のごとく求められる。

$$i) \text{弾性 (D~B): } \ddot{y}_e = N\{\delta - y + q(l - x)\}/EI$$



$$\left. \begin{aligned} y_E &= C_1 \sin k_1 x + C_2 \cos k_1 x + \delta + q(l-x) \\ y_E &= C_1 k_1 \cos k_1 x - C_2 k_1 \sin k_1 x - q \end{aligned} \right\} (6) \quad \text{ただし } k_1^2 = N/EI$$

ii) 第1弾塑性性(C~D) :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_{p1} &= K_1' \{ N(\delta - y) + qN(l-x) - M_x \} / EI + \Phi_1 \\ y_{p1} &= C_3 \sin k_1 x + C_4 \cos k_1 x + \delta + q(l-x) - \overline{M}_x / N \\ \dot{y}_{p1} &= C_3 k_1 \cos k_1 x - C_4 k_1 \sin k_1 x - q \end{aligned} \right\} (7) \quad \begin{aligned} \text{ただし } k_1^2 &= K_1' N / EI \\ \overline{M}_x &= -K_1 M_x / K_1' \\ K_1 &= K_1' - 1 \end{aligned}$$

iii) 第2弾塑性性(A~C) :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_{p2} &= K_2' \{ N(\delta - y) + qN(l-x) - M_x \} / EI + \Phi_2 \\ y_{p2} &= C_5 \sin k_2 x + C_6 \cos k_2 x + \delta + q(l-x) - \overline{M}_x / N \\ \dot{y}_{p2} &= C_5 k_2 \cos k_2 x - C_6 k_2 \sin k_2 x - q \end{aligned} \right\} (8) \quad \begin{aligned} \text{ただし } k_2^2 &= K_2' N / EI \\ \overline{M}_x &= -(M_x K_2 + M_x K_1) / K_2' \\ K_2 &= K_2' - K_1' \end{aligned}$$

上式に含まれる積分常数 $C_1, C_2, \dots, C_6$ は次式のごとき弾塑性境界におけるたわみとたわみ角の連続条件および枝端A, Bの境界条件によって決定される。

$$\left. \begin{aligned} \text{すなわち, } x=0 \text{ で } y_{p2} &= 0, & x=a_2 \text{ で } y_{p2} &= y_{p1}, & \dot{y}_{p2} &= \dot{y}_{p1} \\ x=a_1 \text{ で } y_{p1} &= y_E, & \dot{y}_{p1} &= \dot{y}_E, & x=l \text{ で } y_E &= \delta \end{aligned} \right\} (9)$$

よって $x=0$ で $\dot{y}_{p2}=0$ を用いれば、結局所要の水平力係数 q が次式のごとく求められる。

$$q = k_2 C_5 \quad \dots \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } C_5 &= (F_3 - C_3 \sin k_2 a_2 - C_4 \cos k_2 a_2) / D_1, & D_1 &= k_2 l \cos k_2 a_2 - \sin k_2 a_2, \\ C_6 &= (\overline{M}_x / N - \delta - C_5 k_2 l) & D_2 &= k_2 \cos k_2 a_2 + k_2 l \sin k_2 a_2, \\ C_3 &= (D_3 F_3 - D_4 F_4) / D, & D_3 &= D_2 \sin k_1 a_2 + k_1 D_1 \cos k_1 a_2, \\ C_4 &= (D_3 F_4 - D_7 F_3) / D, & D_4 &= D_2 \cos k_1 a_2 - k_1 D_1 \sin k_1 a_2, \\ F_1 &= (\overline{M}_x - \overline{M}_x) / N - \cos k_2 a_1 (\delta + \overline{M}_x / N), & D_5 &= \sin k_1 a_1 - \tan k_1 l \cos k_1 a_1, \\ F_2 &= k_2 \sin k_2 a_1 (\delta + \overline{M}_x / N), & D_6 &= (\cos k_1 a_1 + \tan k_1 l \sin k_1 a_1) k_1, \\ F_3 &= F_1 D_2 + D_1 F_2, & D_7 &= D_5 k_1 \cos k_1 a_1 - D_6 \sin k_1 a_1, \\ F_4 &= D_6 \overline{M}_x / N, & D_8 &= -D_5 k_1 \sin k_1 a_1 - D_6 \cos k_1 a_1, \\ & & D &= D_3 D_8 - D_4 D_7 \end{aligned}$$

また、第1および第2弾塑性領域未知数 a_1 および a_2 は弾塑性境界条件、すなわち図-2の D, C 変の算出曲げモーメントが部材の初期降伏曲げモーメント M_E および臨界曲げモーメント $\overline{M}_x$ に等しかるべき条件より、式(5)を用いて次式のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} |M_A| \geq M_E \text{ のとき } a_1 &= \frac{-1}{k_1} \sin^{-1} \left(\frac{M_E + \overline{M}_x}{N Q_1} \right) - \frac{\alpha_1}{k_1}, & \text{ただし } \alpha_1 &= \tan^{-1} \left(\frac{C_6}{C_3} \right), & Q_1 &= \sqrt{C_3^2 + C_6^2} \\ |M_A| \geq \overline{M}_x \text{ のとき } a_2 &= \frac{-1}{k_2} \sin^{-1} \left(\frac{M_E + \overline{M}_x}{N Q_2} \right) - \frac{\alpha_2}{k_2}, & \text{ただし } \alpha_2 &= \tan^{-1} \left(\frac{C_6}{C_5} \right), & Q_2 &= \sqrt{C_5^2 + C_6^2} \end{aligned} \right\} (11)$$

式(10)および式(11)の算出に際しては、当初 a_1 および a_2 が未知なるゆえ、これらを以下のごとき弾性解析によってえられる値で近似する。すなわち、まず式(6)に $x=0$ で $y_E = \dot{y}_E = 0$ および $x=l$ で $y_E = \delta$ を代入のうえ δ または q を式(10)のごとく求め、これと式(5)を用いて a_1 および a_2 の第1次近似値をそれぞれ式(13)のごとくうる。

$$\delta = (\tan k_1 l / k_1 - 1) q l \quad \text{または} \quad q = k_1 \delta / (\tan k_1 l - k_1 l) \quad \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} |M_A| \geq M_{II} \text{ のとき } a_1 &= l - \frac{1}{f_e} \sin^{-1} \left(\frac{f_e \cos \theta l \cdot M_I}{g N} \right) \\ |M_A| \geq M_{II} \text{ のとき } a_2 &= l - \frac{1}{f_e} \sin^{-1} \left(\frac{f_e \cos \theta l \cdot M_{II}}{g N} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

一方、初期降伏時のたわみ δ_y および水平力係数 q_y は式(12)と $|M_A| = N(\delta + q l) = M_{II}$ とよりそれぞれ決値のごとくえられる。

$$\delta_y = \left(1 - \frac{f_e l}{\tan \theta l} \right) \frac{M_{II}}{N}, \quad q_y = \frac{f_e}{\tan \theta l} \cdot \frac{M_{II}}{N} \quad \dots (14)$$

よってデータとして $\delta = \delta_y + \Delta\delta (>0)$ を与えれば、A端近傍よりオ1, オ2弾塑性領域 a_1, a_2 が発生することが分るゆえ、まず式(13)より a_1, a_2 を求め、ついで式(10), (11)を併用する数値計算により所要の q をうるることとなる。上記演算過程をフローチャートに示せば図-3のごとくである。

(3)数値計算例 坂本・宮村氏は³⁾ Cantilever を n 等分してくり返し計算による最密解を示しているが、ここではその結果と比較するため次の諸値を用いて数値計算を行った。

$l = 170 \text{ cm}$, 矩形断面 $20 \times 37.56 \text{ cm}$, $\sigma_y = 3.3 \text{ t/cm}^2$, $E = 2.1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$

図-4は軸力比 $n = N/N_y$ をパラメータとしたときの水平力係数 q とたわみ δ との関係を図示したもので、 $n = 0.3$ の場合を除いて最密解と良い一致を示している。よって安定状態より不安定状態に移行するときの限界たわみ δ_{gr} および限界水平力係数 q_{gr} が表-1のごとくえられる。ただし*印は $|M_A| = M_{pN} (= 1.5(1-n)M_y$; 塑性曲げモーメント) に達したときの値を示す。

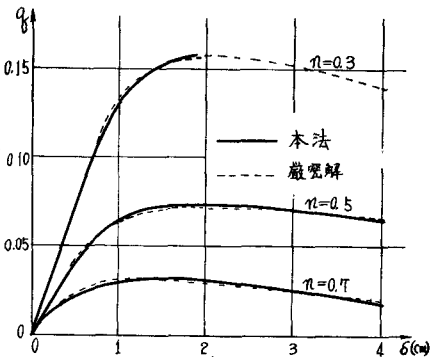


図-4

3. 弾塑性たわみ角式の誘導

(1)一端にのみ弾塑性領域が生ずる場合

いま図-5に示すごとき弾塑性部材ABを考え、A端よりオ1, オ2弾塑性領域 a_1, a_2 がそれぞれ生ずるものとすれば、まず任意長の曲げモーメント M は次式で表わされる。

$$M = \frac{l-x}{l} M_{AB} - \frac{x}{l} M_{BA} + N \left(y - \frac{\delta}{l} x \right) \quad \dots (15)$$

ついで式(1), (2), (3)と式(15)とを用うれば、式(6)~式(8)と同様に、弾性(D~B), オ1弾塑性(C~D)およびオ2弾塑性(A~C)の各領域における微分方程式ならびにたわみとたわみ角がそれぞれ求められることとなり、さらに式(9)のごとき弾塑性境界におけるたわみとたわみ角の連続条件およびA, B両端の限界条件を用うることにより、6つの積分定数が決定されることとなる。

表-1

n	δ_{gr}		q_{gr}	
	最密解	本法	最密解	本法
0.3	1.40	* 1.819	0.15424	* 0.15626
0.5	1.80	1.958	0.06919	0.07130
0.7	1.30	1.246	0.02854	0.03081

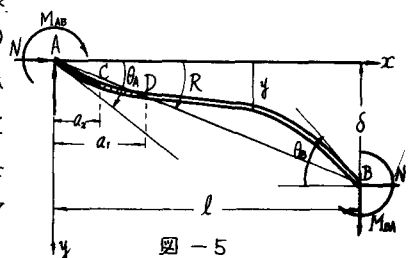


図-5

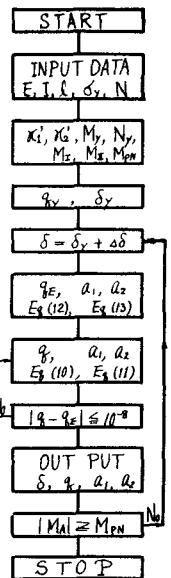


図-3

よって $x=0$ で $y_B = \theta_A$ および $x=l$ で $y_C = \theta_B$ より未知の M_{AB} および M_{BA} を求めれば、結局所要の弾塑性たわみ角式が次式のごとく誘導される。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= K_{AB}(\alpha_{AB} \varphi_A + \beta_{AB} \varphi_B + \gamma_{AB} \psi_{AB}) + \sum_a M_{Ba} \\ M_{BA} &= K_{BA}(\alpha_{BA} \varphi_B + \beta_{BA} \varphi_A + \gamma_{BA} \psi_{AB}) + \sum_a M_{Ba} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに $K = K/K_0$, $K_0 = I_0/l_0$, $\varphi_A = 2EK_0 \theta_A$, $\varphi_B = 2EK_0 \theta_B$, $\psi_{AB} = -6EK_0 R$.

また係数 α_{AB} , β_{AB} , ..., γ_{BA} および弾塑性係数 η_a はそれぞれ表-2のごとき内容となる。

表 - 2

α_{AB}	$k^2 \lambda_0 / 2\Delta$	λ_1	$C_{AB} k_1 l + 1$	C_{AB}	$C_{AB} \sin k_1 a_1 / \sin k_1 l_2 + C_{AB} \cos k_1 a_1 / \sin k_1 l_2 - \cos k_1 l_2 / \sin k_1 l_2$	
β_{AB}	$-k^2 \lambda_0 / \Delta$	λ_2	$C_{AB} k_2 l + 1$	C_{AB}	$C_{AB} \sin k_2 a_1 / \sin k_2 l_2 + C_{AB} \cos k_2 a_1 / \sin k_2 l_2$	
γ_{AB}	$(\alpha_{AB} + \beta_{AB})/3$	λ_0	$C_{AB} k l \cos k l - C_{AB} k l \sin k l + 1$	C_{AB}	$C_{AB} \sin k a_1 / \sin k l_2 + C_{AB} \cos k a_1 / \sin k l_2 + 1$	
$\sum_a$	$(\lambda_0 \mu_a - \lambda_0 \mu_1) / \Delta$	λ_1	$C_{AB} k l \cos k l - C_{AB} k l \sin k l + 1$	C_{AB}	$+ M_{AB} (\cos k_1 a_1 - 1) / M_{AB}$	
α_{BA}	$-k^2 \lambda_0 / 2\Delta$	μ_1	$C_{AB} k l \cos k l - C_{AB} k l \sin k l + 1$	C_{AB}	$k_1 d_1 / \Delta$	
β_{BA}	$k^2 \lambda_0 / \Delta$	μ_2	$(C_{AB} k l \cos k l - C_{AB} k l \sin k l) / N l$	C_{AB}	$-C_{AB} \tan k l$	
γ_{BA}	$(\alpha_{BA} + \beta_{BA})/3$	Δ	$d_1 d_2 - d_3 d_4$	C_{AB}	$-C_{AB} \tan k l - 1 / \cos k l$	
η_a	$(\lambda_1 \mu_a - \lambda_1 \mu_1) / \Delta$	f_1	$k \sin k a_1 d_1 / \cos k l - d_2 \cos k a_1 / \cos k l$	C_{AB}	C_{AB}	
C_{AB}	$-C_{AB} \sin k_1 a_1 / d_1 - C_{AB} \cos k_1 a_1 / d_1$			C_{AB}	$-C_{AB} \tan k l$	
C_{AB}	$-C_{AB} \sin k_2 a_1 / d_1 - C_{AB} \cos k_2 a_1 / d_1 - \cos k_1 a_1 / d_1 \cos k l$			C_{AB}	$-C_{AB} \tan k l - 1 / \cos k l$	
C_{AB}	$-C_{AB} \sin k_1 a_1 / d_1 - C_{AB} \cos k_1 a_1 / d_1 - 1 / d_1$			C_{AB}	C_{AB}	
d_1	$\tan k l \cos k_1 a_1 - \sin k_1 a_1$	d_2	$d_2 \sin k_1 a_1 + k_1 d_1 \cos k_1 a_1$	d_5	$k_1 \sin k_2 a_2 \cos k_2 a_2 - k_2 \cos k_2 a_2 \sin k_1 a_1$	
d_2	$k \cos k_1 a_1 + k \tan k l \sin k_1 a_1$	d_3	$d_2 \cos k_1 a_1 - k_1 d_1 \sin k_1 a_1$	d_6	$-k_1 \sin k_2 a_2 \sin k_1 a_1 - k_2 \cos k_2 a_2 \cos k_1 a_1$	
		d_4	$d_2 \cos k_1 a_1 - k_1 d_1 \sin k_1 a_1$	f_2	$\cos k_2 a_2 + M_{AB} (1 - \cos k_2 a_2) / M_{AB}$	

(2) 両端に弾塑性領域が生ずる場合(図-6参照)

3. (1)の誘導に同じく結果のみ記せば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= K_{AB}(\alpha_{AB} \varphi_A + \beta_{AB} \varphi_B + \gamma_{AB} \psi_{AB}) + \sum_a M_{Ba} \\ M_{BA} &= K_{BA}(\alpha_{BA} \varphi_B + \beta_{BA} \varphi_A + \gamma_{BA} \psi_{AB}) + \sum_a M_{Ba} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ただし係数内容に紙面の都合上省略する。

4. 解法

前記誘導の弾塑性たわみ角式を用うれば、図-7に示すごとき一定軸力 N および漸増水平力 qN が作用するラーメンの弾塑性挙動の解明可能となるが、その解法骨子は慣用の弾性歪曲角法と類似であり、たゞ弾塑性境界条件たる曲げモーメントの適合条件式が加わるのみといえ、その算法は2.で述べたごとく繰返し試算を必要とする。

5. 結語

本論文は N を一定とした $M-N$ 中近似直線を用うることにより、一定軸力および漸増曲げを受けるラーメンの弾塑性安定限界を解明可能ならしめたもので、同様の手法によりひずみ硬化の影響をも考慮した解析が可能となるが、これについては後日発表する予定である。

参考文献 1) 山崎、石川：連統ばりの弾塑性歪曲，第22回土木学会年次学術講演会講演概要，昭和42年5月

2) R. H. Wood: The Stability of Tall Building, Proc of I. C. E., Vol. 11, 1958

3) 坂本 宮林：鋼構造骨組の弾塑性域における変形と安定性に関する考察，木工，II，Ⅲ号

日本建築学会論文報告集 110, 113, 116号，昭和40年4月，7月，10月

4) 山崎、太田 北島：軸力と曲げの組合せ応力に対する補正係数，昭和40年度土木学会西部支部研究発表論文編集，昭和41年1月

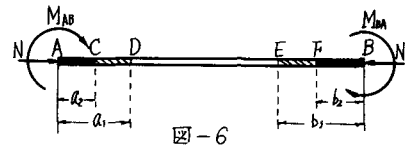


図-6

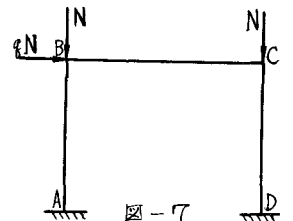


図-7