

I-11 立体構造物の無次元解析

熊本大学 工学部 正員 三池 亮次

1. 要 旨

いわゆる次元解析法とは、現象を規定する諸量を無次元因子として捉えてその相互関係を検討する手法であり、無次元量を誘導するにあたって Buckingham の Pi 定理がしばしば用いられる。

しかしながら構造力学のように数式による現象表示が比較的容易な場合は、Buckingham の Pi 定理によらずとも、数式そのものの無次元化によって、より適正な無次元量を見出すことができる。

本文は、立体ラーメンあるいはトラス—一般弾性基礎式と、あわせてその力学的性状を支配する無次元量の誘導を試みたものである。

無次元量を変数とする構造解析を行えば、構造物の一般的性状をより少ない無次元変数によって検討することができるばかりでなく、構造物の比較設計、あるいは模型実験の相似率を明確に把握することが可能となるのである。ここでは主として形状無次元量の誘導に止める。

2. 立体骨組構造物の無次元解析

立体トラスおよびラーメンの解法については、すでに多くの構造工学者によって研究が試みられ、また大型電子計算機の開発によって従来2次元近似計算しか行うことが不可能であった複雑な立体構造物の3次元設計も、また活発に実施されている。

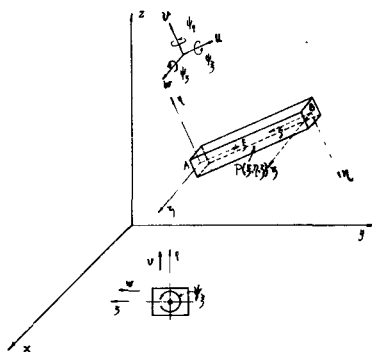
さて構造解析法は、断面力を未知数とする応力法と、変位を未知数とする変形法に分類されるが、立体構造物の無次元量を誘導する見地からは、むしろトラスおよびラーメンを統一的に解析することが可能な変形法によるのがより適切であるものと考えられる。

ここでは、節点における力の平衡方程式、各部材の断面力に関する平衡方程式、および部材断面力と変位との関係式よりなる連立微分方程式を解くことによって、中間荷重の作用する場合の、せん断変形効果を考慮した、トラスおよびラーメンの一般弾性基礎式の無次元解析を行う。

立体構造物の一部材 AB の重心軸方向を ξ 軸にとり、 A 点を原点とする図-1に示す右手直交座標軸(部材座標軸) ξ, η, ζ 軸を考える。各軸方向の変位を u, v, w , 各軸のまわりの回転角を $\psi_\xi, \psi_\eta, \psi_\zeta$ とし、その正の方向を図-1に示すとおりとする。

しかるとき、任意点 $P(\xi, \eta, \zeta)$ における変位は、 P 点を含み ξ 軸に垂直断面の重心の変位、 $u(\xi), v(\xi), w(\xi)$ と中立軸すなわち η, ζ 軸のまわりの回転および重心軸すなわち ξ 軸のまわりのねじりモーメントによる変位が合成されたものであり

図-1 3次元空間における固定および部材座標軸



$$\left. \begin{aligned} u &= u(\xi) - \eta \psi_\xi + \zeta \psi_\eta + \varphi \\ v &= v(\xi) - \zeta \psi_\xi \\ w &= w(\xi) + \eta \psi_\xi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

したがって、各軸方向のひずみ e_ξ, e_η, e_ζ およびせん断ひずみ $e_{\xi\eta}, e_{\xi\zeta}, e_{\eta\zeta}$ は次式のとおりとなる。

$$\left. \begin{aligned} e_\xi &= \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{du(\xi)}{d\xi} - \eta \frac{d\psi_\xi}{d\xi} + \zeta \frac{d\psi_\eta}{d\xi} & e_\eta &= \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & e_\zeta &= \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0 & e_{\eta\zeta} &= 0 \\ e_{\xi\eta} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = \left(\frac{dv(\xi)}{d\xi} - \psi_\xi \right) + \left(-\zeta \frac{d\psi_\xi}{d\xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = e_{\xi\eta 1} + e_{\xi\eta 2} \\ e_{\xi\zeta} &= \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \left(\frac{dw(\xi)}{d\xi} + \psi_\eta \right) + \left(\eta \frac{d\psi_\xi}{d\xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) = e_{\xi\zeta 1} + e_{\xi\zeta 2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

部材の任意の正の断面における正の ξ, η, ζ 軸方向の軸力およびせん断力を、 X, Y, Z 、各軸のまわりのモーメントを M_ξ, M_η, M_ζ 、添字 ij で (ij) 部材を表わすものとすれば

$$X_{ij} = E_{ij} A_{ij} \frac{du_{ij}}{d\xi} \quad (3)$$

$$Y_{ij} = G_{ij} A_{ij} \left(\frac{dv_{ij}}{d\xi} - \psi_{\xi ij} \right) \quad (4)$$

$$Z_{ij} = G_{ij} A_{ij} \left(\frac{dw_{ij}}{d\xi} + \psi_{\eta ij} \right) \quad (5)$$

$$M_{\xi ij} = G_{ij} \left\{ I_{\xi ij} \frac{d\psi_{\xi ij}}{d\xi} - \iint \left(\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) d\eta d\zeta \right\} = k_{ij} G_{ij} I_{\xi ij} \frac{d\psi_{\xi ij}}{d\xi} \quad (6)$$

$$M_{\eta ij} = E_{ij} I_{\eta ij} \frac{d\psi_{\eta ij}}{d\xi} \quad (7)$$

$$M_{\zeta ij} = E_{ij} I_{\zeta ij} \frac{d\psi_{\zeta ij}}{d\xi} \quad (8)$$

ここに、 E, G は縦弾性係数およびせん断弾性係数、 A, I は断面積および断面2次モーメントである。また(3)~(8)式の u, v, w は(2)式における $u(\xi), v(\xi), w(\xi)$ である。

各部材における断面力と、部材間にかかる各軸方向荷重および各軸のまわりのモーメント、 $\beta_{\xi ij}, \beta_{\eta ij}, \beta_{\zeta ij}, p_{\xi ij}, p_{\eta ij}, p_{\zeta ij}, p_{\xi\eta ij}, p_{\xi\zeta ij}, p_{\eta\zeta ij}$ に関する平衡方程式は、次式のとおりとなる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_{ij}}{d\xi} + \beta_{\xi ij} &= 0 & \frac{dM_{\xi ij}}{d\xi} + p_{\xi\eta ij} &= 0 \\ \frac{dY_{ij}}{d\xi} + \beta_{\eta ij} &= 0 & \frac{dM_{\eta ij}}{d\xi} - Z_{ij} + p_{\eta\zeta ij} &= 0 \\ \frac{dZ_{ij}}{d\xi} + \beta_{\zeta ij} &= 0 & \frac{dM_{\zeta ij}}{d\xi} + Y_{ij} + p_{\zeta\eta ij} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

また、この節点における力およびモーメントの平衡方程式は

$$\left. \begin{aligned} \sum_j (X_{ji} l_{3x} + Y_{ji} l_{1x} + Z_{ji} l_{2x}) + X_i &= 0 & \sum_j (M_{\xi ji} l_{3x} + M_{\eta ji} l_{1x} + M_{\zeta ji} l_{2x}) + M_{xi} &= 0 \\ \sum_j (X_{ji} l_{3y} + Y_{ji} l_{1y} + Z_{ji} l_{2y}) + Y_i &= 0 & \sum_j (M_{\xi ji} l_{3y} + M_{\eta ji} l_{1y} + M_{\zeta ji} l_{2y}) + M_{yi} &= 0 \\ \sum_j (X_{ji} l_{3z} + Y_{ji} l_{1z} + Z_{ji} l_{2z}) + Z_i &= 0 & \sum_j (M_{\xi ji} l_{3z} + M_{\eta ji} l_{1z} + M_{\zeta ji} l_{2z}) + M_{zi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに $X_i, Y_i, Z_i, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}$ はこの節点における、固定座標軸方向の外力またはその軸のまわりの外力として のモーメントであり、 $X_{ji}, Y_{ji}, \dots$ は (ij) 部材の j 点における断面力、 $l_{3x}, l_{1y}, \dots$ は固定座標軸に対する部材座標軸の方向余弦である。

(3)~(6) 式を連立微分方程式を解くことにより、次式の無次元断面力を誘導することができる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} X'_{ij} &= \frac{X_{ij}}{E_0 A_0} = \alpha_{ij} (u'_{ij} - u'_{ji}) + \frac{C_{xij}}{E_0 A_0} \\ Y'_{ij} &= \frac{Y_{ij}}{E_0 A_0} = \alpha_{ij} \left\{ (Yv)'_{ij} (u'_{ij} - u'_{ji}) + (Y\psi)'_{ij} (\psi'_{zij} + \psi'_{zji}) \right\} + \frac{C_{yij}}{E_0 A_0} \\ Z'_{ij} &= \frac{Z_{ij}}{E_0 A_0} = \alpha_{ij} \left\{ (Zw)'_{ij} (w'_{ij} - w'_{ji}) + (Z\psi)'_{ij} (\psi'_{zij} + \psi'_{zji}) \right\} + \frac{C_{zij}}{E_0 A_0} \\ M'_{zij} &= \frac{M_{zij}}{E_0 A_0 l_0} = \beta_{ij} (M_3\psi)'_{ij} (\psi'_{zij} - \psi'_{zji}) + \frac{C_{mzij}}{E_0 A_0 l_0} \\ M'_{\eta zij} &= \frac{M_{\eta zij}}{E_0 A_0 l_0} = \beta_{ij} \left\{ (M_\eta w)'_{ij} (w'_{ij} - w'_{ji}) + (M_\eta\psi)'_{ij} \psi'_{\eta zij} + (M_\eta\psi)'_{ij} \psi'_{\eta zji} \right\} + \frac{C_{m\eta zij}}{E_0 A_0 l_0} \\ M'_{zij} &= \frac{M_{zij}}{E_0 A_0 l_0} = \beta_{ij} \left\{ (M_3v)'_{ij} (v'_{ij} - v'_{ji}) + (M_3\psi)'_{ij} \psi'_{zij} + (M_3\psi)'_{ij} \psi'_{zji} \right\} + \frac{C_{mzij}}{E_0 A_0 l_0} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここに E_0, A_0, l_0 等の添字 0 は基本部材における値を意味し、 $C_{xij}, C_{yij}, \dots$ 等は軸力、せん断力、モーメントに関する荷重常数で、両端固定部材に中間荷重の作用する場合の i 端における各断面力である。また

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{E_{ij} A_{ij}}{E_0 A_0}, \quad u'_{ij} = \frac{u_{ij}}{l_{ij}}, \quad v'_{ij} = \frac{v_{ij}}{l_{ij}} \dots \dots \dots \\ (Yv)'_{ij} &= \frac{l_z}{(1+12\varepsilon_{zij})r_{zij}^2}, \quad \varepsilon_{zij} = \frac{2(1+\nu_{ij})}{r_{zij}^2}, \quad r_{zij}^2 = \frac{A_{ij} l_{ij}^2}{I_{zij}}, \quad (Y\psi)'_{ij} = -\frac{1}{2}(Yv)'_{ij} \\ (Zw)'_{ij} &= \frac{l_z}{(1+12\varepsilon_{zij})r_{zij}^2}, \quad \varepsilon_{zij} = \frac{2(1+\nu_{ij})}{r_{zij}^2}, \quad r_{zij}^2 = \frac{A_{ij} l_{ij}^2}{I_{zij}}, \quad (Z\psi)'_{ij} = \frac{1}{2}(Zw)'_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

で、 r_{zij}, r_{zij} は細長比であり、細長比の大きい場合には、 $\varepsilon_{zij}, \varepsilon_{zij}$ は近似的に零と見なし得る。すなわち、細長比の大きい場合にはせん断力による変形を無視し得ることがわかる。同様に

$$\left. \begin{aligned} \beta_{ij} &= \alpha_{ij} \frac{l_{ij}}{l_0} = \alpha_{ij} \delta_{ij} \\ (M_3\psi)'_{ij} &= \frac{k_{ij}}{2(1+\nu_{ij})r_{zij}^2}, \quad r_{zij}^2 = \frac{A_{ij} l_{ij}^2}{I_{zij}} = \frac{1}{\frac{1}{r_{zij}^2} + \frac{1}{r_{zij}^2}} \\ (M_\eta w)'_{ij} &= \frac{-6}{(1+12\varepsilon_{\eta zij})r_{\eta zij}^2}, \quad (M_\eta\psi)'_{ij} = \frac{-2(1-6\varepsilon_{\eta zij})}{(1+12\varepsilon_{\eta zij})r_{\eta zij}^2}, \quad (M_\eta\psi)'_{ij} = \frac{-4(1+3\varepsilon_{\eta zij})}{(1+12\varepsilon_{\eta zij})r_{\eta zij}^2} \\ (M_3v)'_{ij} &= \frac{6}{(1+12\varepsilon_{zij})r_{zij}^2}, \quad (M_3\psi)'_{ij} = \frac{-2(1-6\varepsilon_{zij})}{(1+12\varepsilon_{zij})r_{zij}^2}, \quad (M_3\psi)'_{ij} = \frac{-4(1+3\varepsilon_{zij})}{(1+12\varepsilon_{zij})r_{zij}^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

である。(12), (13) 式から、細長比が小さい場合、部材断面力係数 $(Yv)'_{ij}, (Y\psi)'_{ij}, (Zw)'_{ij}, (Z\psi)'_{ij}, (M_3\psi)'_{ij}, (M_\eta w)'_{ij}, (M_\eta\psi)'_{ij}, (M_\eta\psi)'_{ij}, (M_3v)'_{ij}, (M_3\psi)'_{ij}, (M_3\psi)'_{ij}$ はどれも近似的に零と見なし得るから、もし変位が微小であれば、(11) 式により、 X'_{ij} 以外の断面力が極めて小さくなることが推察される。

(11) 式を (10) 式に代入すれば、立体骨組構造の変位を未知数とする連立方程式が次式のとおり誘導される。すなわち、 x 軸方向の力の平衡方程式は、

$$\sum_j \alpha_{ij} \left\{ \begin{aligned} &[(u'_{ij} - u'_{ji}), (v'_{ij} - v'_{ji}), (w'_{ij} - w'_{ji})] \begin{bmatrix} l_{3x} \\ (Yv)'_{ij} l_{\eta x} \\ (Zw)'_{ij} l_{3x} \end{bmatrix} + [(\psi'_{zij} + \psi'_{zji}), (\psi'_{zij} + \psi'_{zji})] \begin{bmatrix} (Z\psi)'_{ij} l_{3x} \\ (Y\psi)'_{ij} l_{\eta x} \end{bmatrix} \right\} \\ &+ \frac{1}{E_0 A_0} \left[\sum_j \{ C_{xij} l_{3x} + C_{yij} l_{\eta x} + C_{zij} l_{3x} \} + X_i \right] = 0 \end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned} d_i' &= \frac{1}{E_0} [u_i, v_i, w_i] = [u_i', v_i', w_i'] & \psi_i' &= [\psi_{xi}, \psi_{yi}, \psi_{zi}] & \ell_{xF1}' &= [\ell_{3x}, (\gamma v)_{ij} \ell_{qx}, (Zw)_{ij} \ell_{3x}] \\ d_{ij}' &= [u_{ji}', v_{ji}', w_{ji}'] & \psi_{ji}' &= [\psi_{xji}, \psi_{yji}, \psi_{zji}] & \ell_{xF2}' &= [(Z\psi)_{ij} \ell_{3x}, (\gamma \psi)_{ij} \ell_{qx}] \\ L_1 &= \begin{bmatrix} \ell_{3x} & \ell_{3y} & \ell_{3z} \\ \ell_{qx} & \ell_{qy} & \ell_{qz} \\ \ell_{3x} & \ell_{3y} & \ell_{3z} \end{bmatrix} & L_2 &= \begin{bmatrix} \ell_{qx} & \ell_{qy} & \ell_{qz} \\ \ell_{3x} & \ell_{3y} & \ell_{3z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とすれば

$$\begin{aligned} d_{ijj} - d_{iji} &= L_1 (d_j - d_i) / \delta_{ij} & \psi_{ijj} + \psi_{jji} &= L_2 (\psi_j + \psi_i) \\ \therefore (d_{ijj} - d_{iji})' &= \frac{1}{E_0} (d_j - d_i)' L_1' & (\psi_{ijj} + \psi_{jji})' &= (\psi_j + \psi_i)' L_2' \end{aligned}$$

したがって平衡方程式は

$$\sum_j \alpha_{ij} \left\{ \frac{1}{\delta_{ij}} (d_j - d_i)' L_1' \ell_{xF1} + (\psi_j + \psi_i)' L_2' \ell_{xF2} \right\} + \frac{1}{E_0 A_0} \left[\sum_j \{ C_{xij} \ell_{3x} + C_{yij} \ell_{qx} + C_{zij} \ell_{3x} \} + \chi_i \right] = 0 \quad (14)$$

$$a_{iF} = \begin{bmatrix} (a_{11})_{ij} \\ (a_{12})_{ij} \\ (a_{13})_{ij} \end{bmatrix} = \frac{\alpha_{ij}}{\delta_{ij}} L_1' \ell_{xF1} \quad a_{iM} = \begin{bmatrix} (a_{21})_{ij} \\ (a_{22})_{ij} \\ (a_{23})_{ij} \end{bmatrix} = \alpha_{ij} L_2' \ell_{xF2} \quad (15)$$

とすれば (14) 式は

$$\begin{aligned} & - \left[\sum_j (a_{11})_{ij} u_i' - \sum_j (a_{12})_{ij} v_i' - \sum_j (a_{13})_{ij} w_i' + \sum_j (a_{21})_{ij} \psi_{xi} + \sum_j (a_{22})_{ij} \psi_{yi} + \sum_j (a_{23})_{ij} \psi_{zi} \right. \\ & + \sum_j [(a_{11})_{ij} u_j'] + \sum_j [(a_{12})_{ij} v_j'] + \sum_j [(a_{13})_{ij} w_j'] + \sum_j [(a_{21})_{ij} \psi_{xj}] + \sum_j [(a_{22})_{ij} \psi_{yj}] + \sum_j [(a_{23})_{ij} \psi_{zj}] \\ & \left. + \frac{1}{E_0 A_0} \left[\sum_j \{ C_{xij} \ell_{3x} + C_{yij} \ell_{qx} + C_{zij} \ell_{3x} \} + \chi_i \right] \right] = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

同様に、z軸のまわりのモーメントの平衡方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \ell_{xM1}' &= [(M_3 v)_{ij} \ell_{3x}, (M_3 w)_{ij} \ell_{qx}] & a_{iF}' &= [(a_{31})_{ij}, (a_{32})_{ij}, (a_{33})_{ij}] = \alpha_{ij} (L_2' \ell_{xM1})' \\ \ell_{xM2}' &= [-(M_3 \psi)_{ij} \ell_{3x}, (M_3 \psi)_{ij} \ell_{qx}, (M_3 \psi)_{ij} \ell_{3x}] & a_{iM1}' &= [(a_{34})_{ij}, (a_{35})_{ij}, (a_{36})_{ij}] = \beta_{ij} (L_1' \ell_{xM2})' \\ \ell_{xM3}' &= [(M_3 \psi)_{ij} \ell_{3x}, (M_3 \psi)_{ij} \ell_{qx}, (M_3 \psi)_{ij} \ell_{3x}] & a_{iM2}' &= [(a_{37})_{ij}, (a_{38})_{ij}, (a_{39})_{ij}] = \beta_{ij} (L_1' \ell_{xM3})' \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

とすれば

$$\begin{aligned} & - \left[\sum_j (a_{31})_{ij} u_i' - \sum_j (a_{32})_{ij} v_i' - \sum_j (a_{33})_{ij} w_i' + \sum_j (a_{34})_{ij} \psi_{xi} + \sum_j (a_{35})_{ij} \psi_{yi} + \sum_j (a_{36})_{ij} \psi_{zi} \right. \\ & + \sum_j [(a_{31})_{ij} u_j'] + \sum_j [(a_{32})_{ij} v_j'] + \sum_j [(a_{33})_{ij} w_j'] + \sum_j [(a_{34})_{ij} \psi_{xj}] + \sum_j [(a_{35})_{ij} \psi_{yj}] + \sum_j [(a_{36})_{ij} \psi_{zj}] \\ & \left. + \frac{1}{E_0 A_0} \left[\sum_j \{ C_{3xij} \ell_{3x} + C_{3yij} \ell_{qx} + C_{3zij} \ell_{3x} \} + M_{xi} \right] \right] = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

y軸あるいはz軸に対する平衡方程式は、 ℓ_{xF1} , ℓ_{xF2} , ℓ_{xM1} , ℓ_{xM2} , ℓ_{xM3} , および荷重係数にかかろう方向余弦の添字xをyあるいはzに置換すればよい。

3. 結 語

立体骨粗構造物の力学的性状を支配する無次元量として細長比 r_{ij} , r_{3ij} , ポアソン比 ν_j および α_{ij} , δ_{ij} , k_j と誘導した。とくに細長比は、せん断変形の効果およびトラスの応力を無視し得るかどうかを決定する一つの重要な無次元量であろうことが推察された。

最後に御懇切な御指導御鞭撻を賜った熊大工学部福井武弘教授、吉村虎蔵教授に深甚な謝意を表す。なお紙面の都合上参考文献の紹介は講演会当日に行う。