

I-10 材の途中にヒンジをもつはり構造の結合法による動的解析の基礎式

熊本大学 正員 吉村虎蔵
 同 同 平井一男
 同 同 田久英明
 同 〇 加藤勝敏

まえがき

これまでに結合法による構造物の動的解析として、単純ランガー橋、ローゼ桁、2ヒンジアーチ、つり橋、格子構造、弾性支点をもつ連続ばりなどを解析してきた。

ここでは、新たにモーメント面積荷重を定義し、これによって材の途中にヒンジをもつはり構造の動的解析のもととなる基礎式を誘導したので報告する。数値計算例として、基礎式の静的問題への応用、および単純ばりにヒンジがある場合の固有振動数とモードを解いて、基礎式の正しいことを確認した。この基礎式はゲルバーばり、ゲルバーランガー桁などの振動解析への適用が考えられる。

1. 基礎式の誘導

動的モーメント荷重が作用する場合の m 次の振動に対する運動方程式として次の式はすでに導かれている²⁾。

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = \bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}_m'(x_j) M(t) \quad (1)$$

ここに w_m : m 次の振動による振動変位

x_i : 測点の座標

ω_m : m 次の固有円振動数

x_j : 荷重点の座標

$\bar{\Phi}_m(x)$: m 次の正規化した振動モード

$M(t)$: 動的モーメント荷重

次に図-1のように動的モーメント荷重 $M(t)$ が微小距離 Δx_j をへだてて作用する場合を考えると次のようになる。

$$\begin{aligned} \ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m &= \bar{\Phi}_m(x_i) \{ \bar{\Phi}_m'(x_j) M(t) - \bar{\Phi}_m'(x_j + \Delta x_j) M(t) \} \\ &= -\bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}_m''(x_j) M(t) \Delta x_j \end{aligned}$$

ここで上式を改めて次のように示す。

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = -\bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}_m''(x_j) m(t) \quad (2)$$

ここに $m(t) = M(t) \Delta x_j$

$m(t)$ をモーメント面積荷重と呼ぶことにする。

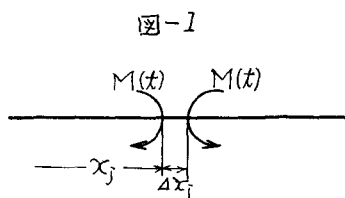
集中モーメント面積荷重¹⁾が作用する場合には、運動方程式は式(2)で示されるのでこれを解いて

$$\left. \begin{aligned} w_m &= \frac{-1}{\omega_m^2 - \omega^2} \bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}_m''(x_j) m \sin \omega t \\ \text{ゆえに動的たわみは} \quad w &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

上式を静的たわみと動的増加たわみに分けて次のように示すことができる。

$$w = w_s \sin \omega t + \Delta w_d \quad (4)$$

$$\text{あるいは} \quad w = -\sum \frac{1}{\omega_m^2} \bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}_m''(x_j) m \sin \omega t - \sum \frac{\omega^2}{\omega_m^2(\omega_m^2 - \omega^2)} \bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}_m''(x_j) m \sin \omega t \quad (5)$$



式(5)の右辺第1項は静的たわみであるが、一般にこれは静力学的に代数式で表わすことができる。また曲げモーメントも同様に静的曲げモーメント M_s と動的増加曲げモーメント ΔM_d とに分けて次のように表わすことができる。

$$M = M_s \sin \omega t + \Delta M_d \quad (6)$$

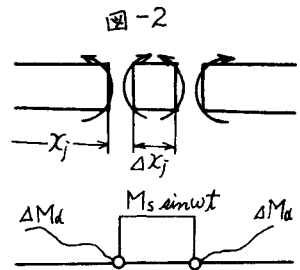
いま、はりの途中($x_i = x_j$)に集中モーメント面積荷重 $\mathcal{M} \sin \omega t$ をかけたとき、測定点 $x_i = x_j$ の曲げモーメントはやはり式(6)で表わされ、 Δx_j の両端では $M_s = 0$ であるから、結局ヒンジの条件は次式で与えられる(図-2)。

$$\Delta M_d (x_i = x_j) = 0 \quad (7)$$

すなわち

$$\Delta M_d (x_i = x_j) = -EI \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega_m^2 (\omega_m^2 - \omega^2)} \bar{\Phi}_m''(x_j) \bar{\Phi}_m''(x_j) = 0 \quad (8)$$

式(8)は、はりの途中に一つのヒンジがあるときの振動数方程式であって、ここに ω_m 、 $\bar{\Phi}_m$ はヒンジのないはりの m 次の固有円振動数、正規化したモードである。



2. 数値計算例

静的問題への応用の一つの例として、単純はりに集中モーメント面積荷重 $\mathcal{M}$ が作用するときの静的たわみを式(5)の第1項より求め、これを動的解析から得た結果と比較しよう。

式(5)において、単純はりでは

$$\omega_m = \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{P}}, \quad \bar{\Phi}_m(x_i) = \sqrt{\frac{2}{Pl}} \sin \frac{m\pi x_i}{l}$$

であるから、たわみ W は次のように整理される。

$$W = \frac{2l\mathcal{M}}{\pi^2 EI} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \sin \frac{m\pi x_j}{l}$$

これは、モールの定理により解いた次の式に一致する。

$$W = \frac{l-x_j}{l} \frac{\mathcal{M}}{EI} x_i, \quad (0 < x_i < x_j) \quad \cdot \quad W = \frac{x_i}{l} \frac{\mathcal{M}}{EI} (l-x_i), \quad (x_j < x_i < l)$$

次に動的解析への応用例として、単純はりの中点に一つのヒンジがあるときの固有振動数と振動モードを求めて見よう。

単純はりの ω_m 、 $\bar{\Phi}_m$ を式(8)に入れると、ヒンジのあるときの振動数方程式は整理して次式となる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{P}} - \omega^2} \sin^2 \frac{m\pi}{2} = 0 \quad (9)$$

式(9)より固有振動数 ω を求め、さらに振動モードを求めるとそれぞれ表-1、表-2 が得られる。この値は問題のはりの対称振動についてのみ求めたが、ヒンジ点では剪断力が働かないゆえに、この値は一端単純支持・他端自由・材長 $l/2$ のはりの固有振動数、振動モードに一致すべきである。後者の解と式(9)の解を表-1、表-2 に併記して比較した。

表 1

次数	ω	結合法 ($\times 10^3$)	モデル ($\times 10^3$)
対称振動	1次	61.67	61.67
	2次	199.9	199.9
	3次	417.0	417.0

表 2

モード x/l	結合法 ($\times 10^{-3}$)	モデル ($\times 10^{-3}$)	比 ($\times 10^{-2}$)	モード x/l	結合法 ($\times 10^{-3}$)	モデル ($\times 10^{-3}$)	比 ($\times 10^{-2}$)
対称	0	0		対称	0	0	
	0.1	3.074	0.9661		0.1	2.475	1.400
対称	0.2	4.211	1.324	対称	0.2	0.7992	0.4514
	0.3	2.592	0.7945		0.3	2.125	1.200
対称	0.4	1.449	0.4549	対称	0.4	1.035	0.5880
	0.5	6.360	2.000		0.5	3.530	2.000

注) モードは正規化していないが各々で比が一定であれば正しいことになる。

3. 2スパンゲルバーりの振動数方程式

図-3aのゲルバーりを考える。これを解くには、図-3bの単純ばりに同時に動的集中モーメント面荷重と動的集中荷重を作用させ、点 x_1 でヒンジの条件、点 x_2 で支点不動の条件を考えれば良いことになる。

この場合の運動方程式は

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = -\Phi_m(x_i) \Phi_m''(x_i) M \sin \omega t + \Phi_m(x_i) \Phi_m(x_2) P \sin \omega t \quad (10)$$

これを解いて

$$w_m = -\frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \Phi_m(x_i) \Phi_m''(x_i) M \sin \omega t + \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \Phi_m(x_i) \Phi_m(x_2) P \sin \omega t \quad (11)$$

たわみは

$$w = \sum -\frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \Phi_m(x_i) \Phi_m''(x_i) M \sin \omega t + \sum \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \Phi_m(x_i) \Phi_m(x_2) P \sin \omega t$$

あるいは

$$w = w_{sm} \sin \omega t + \sum -\frac{\omega^2}{\omega_m^2 - \omega^2} \Phi_m(x_i) \Phi_m(x_i) M \sin \omega t + w_{sp} \sin \omega t + \sum \frac{\omega^2}{\omega_m^2 - \omega^2} \Phi_m(x_i) \Phi_m(x_2) P \sin \omega t \quad (12)$$

ここに

$$w_{sm} = \frac{l - x_1}{l} \frac{M}{EI} x_i \quad (0 < x_i < x_1) ; w_{sm} = \frac{x_1}{l} \frac{M}{EI} (l - x_i), \quad (x_1 < x_i < l)$$

$$w_{sp} = \frac{Pl^3}{6EI} \frac{l - x_2}{l} \left\{ \frac{x_2}{l} + \frac{x_2}{l} \frac{l - x_2}{l} - \left(\frac{x_i}{l} \right)^2 \right\} \frac{x_i}{l}, \quad (0 < x_i < x_2)$$

$$\frac{Pl^3}{6EI} \frac{x_2}{l} \left\{ \frac{l - x_2}{l} + \frac{x_2}{l} \frac{l - x_2}{l} - \left(\frac{l - x_i}{l} \right)^2 \right\} \frac{l - x_i}{l} \quad (x_2 < x_i < l)$$

$x_i = x_2$ で支点不動の条件 $w = 0$ を入れて整理すると

$$\left\{ \frac{x_i}{lEI} (l - x_2) + \sum -\frac{\omega^2}{\omega_m^2 (\omega_m^2 - \omega^2)} \Phi_m(x_2) \Phi_m''(x_i) \right\} M + \left\{ \frac{x_2^2}{3EI l} (l - x_2)^2 + \sum \frac{\omega^2}{\omega_m^2 (\omega_m^2 - \omega^2)} \Phi_m(x_2) \Phi_m(x_2) \right\} P = 0 \quad (13)$$

また $x_i = x_1$ ではヒンジの条件 $M = 0$ を入れる。

このとき M は次のように分解できる。

$$M = M_{sm} + M_{sp} + \Delta M_{ap} \quad (14)$$

ここに

$M_{s\alpha\alpha}$: 静的集中モーメント面積荷重 α が作用したときの曲げモーメント

$M_{s\beta}$: 静的集中荷重 P が作用したときの曲げモーメント

$\Delta M_{d\beta}$: 動的モーメント面積荷重と動的荷重が同時に作用したときの曲げモーメントの動的増加量

ここでは

$$M_{s\alpha\alpha} = 0, \quad M_{s\beta} = -EI \omega_{sp}'' = \frac{l-x_2}{l} x_1 P$$

$$\Delta M_{d\beta} = -EI \left\{ \sum_m \frac{\omega^2}{\omega_m^2(\omega_m^2 - \omega^2)} \bar{\Phi}_m''(x_1) \bar{\Phi}_m''(x_1) \alpha + \sum_m \frac{\omega^2}{\omega_m^2(\omega_m^2 - \omega^2)} \bar{\Phi}_m''(x_1) \bar{\Phi}_m(x_2) P \right\} \quad (15)$$

従って式(14)は次のようになる。

$$EI \sum_m \frac{\omega^2}{\omega_m^2(\omega_m^2 - \omega^2)} \bar{\Phi}_m''(x_1) \bar{\Phi}_m''(x_1) \alpha + \left\{ \frac{l-x_2}{l} x_1 + EI \sum_m \frac{-\omega^2}{\omega_m^2(\omega_m^2 - \omega^2)} \bar{\Phi}_m''(x_1) \bar{\Phi}_m(x_2) \right\} P = 0 \quad (16)$$

式(13)と式(16)の α と P の係数の行列式を 0 とおけば振動数方程式は次のように示される。

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{l}(l-x_2) + EI \sum_m \frac{\omega^2}{\omega_m^2(\omega_m^2 - \omega^2)} \bar{\Phi}_m(x_2) \bar{\Phi}_m'(x_1) & \frac{x_2^2(l-x_2)^2}{3l^2} + EI \sum_m \frac{\omega^2}{\omega_m^2(\omega_m^2 - \omega^2)} \bar{\Phi}_m(x_2) \bar{\Phi}_m(x_2) \\ EI \sum_m \frac{\omega^2}{\omega_m^2(\omega_m^2 - \omega^2)} \bar{\Phi}_m''(x_1) \bar{\Phi}_m'(x_1) & \frac{l-x_2}{l} x_1 + EI \sum_m \frac{-\omega^2}{\omega_m^2(\omega_m^2 - \omega^2)} \bar{\Phi}_m''(x_1) \bar{\Phi}_m(x_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

上式に単純ばりの ω_m と $\bar{\Phi}_m$ を入れて整理すると

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{l^2}(l-x_2) + \frac{2}{\pi^2} \sum_m \frac{\omega^2}{m^2 \left\{ \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{EI}{P} - \omega^2 \right\}} \sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin \frac{m\pi x_2}{l} & \frac{x_2^2(l-x_2)^2}{3l^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_m \frac{\omega^2}{m^2 \left\{ \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{EI}{P} - \omega^2 \right\}} \left(\sin \frac{m\pi x_2}{l} \right)^2 \\ 2 \sum_m \frac{\omega^2}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{EI}{P} - \omega^2 \right\}} \left(\sin \frac{m\pi x_1}{l} \right)^2 & \frac{x_1(l-x_2)}{l^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_m \frac{\omega^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l}}{m^2 \left\{ \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{EI}{P} - \omega^2 \right\}} \sin \frac{m\pi x_2}{l} \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

式(18)は 2 スパンゲルバーりの振動数方程式になる。

むすび

結合法の適用については、上路式および下路式のランガー橋、ローゼ桁、2 ヒンジアーチ、つり橋、連続ばり、格子構造などの動的解析に対してはすでに発表されてきたが、途中にヒンジをもつはり構造については未解決であったのでその動的解析の基礎式をここに誘導した。また 2, 3 の場合についてこの式の正しいことを確かめ、ゲルバーりの本法による振動数方程式を導いた。この方法はゲルバーり、ゲルバーランガー、ティビダーク方式連続ラーメン橋などの動的解析に適用したいと考えている。

参考文献

- 1) 吉村・平井, ランガー桁の動的解析, 土木学会誌 101号, 昭 39.1
- 2) 同上, 結合法による弾性支承を有する連続ばりの動的解析, 同上 104号, 昭 39.4
- 3) 同上, 補剛アーチ橋およびつり橋の動的共通解析, 同上 115号, 昭 40.3
- 4) 同上, はりあるいはラーメンとトラスとを組合せた構造物の動的および静的解析法について
同上 116号, 昭 40.4
- 5) 平井, 結合法による格子構造の動的解析, 同上 101号, 昭 39.1