

熊本大学	正員	吉村亮哉
同	学生	中島国一
佐世保重工	正員	高村 清
同	正員	藤本昭三

2ヒンジアーチ橋、ランガー橋、ローゼン橋などは鉛直振動の最低振動数は逆対称の一次振動であって、この振動数は対称一次振動に比べてきわめて低く、単支間の地盤の構造と著しくその性質を異にする。このために上記のタウアーの橋の4点のたわみは通常の場合4点のたわみよりも大で、これらの橋の剛性を落す結果となっている。これに対してトラストランガー橋、ニールセン式橋梁では、鉛直材に代つて斜材あるいは斜吊材を用いるために、逆対称振動数が上り、一般に通常の補剛アーチ橋よりも剛性が大きい。

筆者の一人は文献(1)において、アーテクラウンの水平変位を完全に拘束したとき、その固有振動数および剛性がどのように高くなるかについて発表した。その研究は、通常実際の上路式補剛アーチ橋が解析に扱うモデルの構造よりも格段に剛性が高いという多くの実験結果に着目して、試算したものであるが、今回は補剛材あるいは斜材などによってアーテクラウンを水平に弾性的に拘束した場合について、つまり実際の構造により忠実にモデルを取上げ、その動的解析の方法を述べ、その拘束の効果を調べた結果について報告する。上路式補剛アーチ橋では、トラストランガー、ニールセン形式によらずとも剛性を上げることができるとであろうし、逆対称振動数を高くすることができると言うからである。

1 動的解析の理論

筆者等の論文(2)において2ヒンジアーチ橋、ローゼン橋、つり橋、タイドアーチ橋などがランガー橋の動的解析の式と同じ式で解析できることが示されているので、ここでは逆ランガー橋について動的解析の基礎式を誘導すれば足りる。

解析のモデルとしては図-1のモデルを考える。この鉛直振動モードは

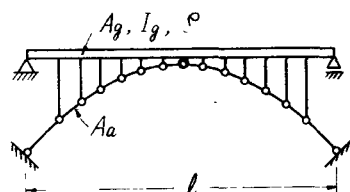
$$y(x) = \sum_n A_n \sin(n\pi x/l) \quad (1)$$

で表わされるが、対称振動のとき、クラウンは左右に不動であるから、補剛材はアーテに水平拘束を与えない。また逆対称振動のとき $n=4, 8, 12 \dots$ でもクラウンの水平振動はないから、補剛材はアーテに水平拘束を与えず、ただ $n=2, 6, 10 \dots$ に対して水平拘束を与えることとなる。故に $n=1, 3, 5 \dots$; $n=4, 8, 12 \dots$ に対しては文献(2)の逆ランガー橋の式を用いればよい。 $n=2, 6, 10 \dots$ の変形に対するものだけが今の場合の問題となる。

アーテスパンの伸び Δl_a は文献(3)によれば

$$\Delta l_a = \sum_j \Delta x_j = \sum_j \Delta y_j \cdot \tan \alpha_j - \sum_j \sec \alpha_j \cdot \Delta s_j \quad (2)$$

図-1 解析モデル



ここに、 Δy は相隣る格長の相対鉛直たわみ、 α はアーテ材の水平との傾き、 Δs は軸力による材のちぢみ。アーテの変形は式(1)で与えられるが、アーテ軸線を放物線とすれば、式(2)の右辺 α -項は

$$\left. \begin{aligned} \sum_{x=0}^{x=l} \Delta y \tan \alpha &= \int_0^l \tan \alpha \cdot d\varphi \\ &= 0 \quad \text{for } n = 1, 3, 5, \dots; n = 4, 8, 12, \dots \\ &= \frac{16f}{l} \sum_n \frac{Q_n}{n\pi} \quad \text{for } n = 2, 6, 10, \dots \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{x=0}^{x=l} \Delta y \tan \alpha &= \int_0^l \tan \alpha \cdot d\varphi \\ &= \frac{16f}{l} \sum_n \frac{Q_n}{n\pi} \quad \text{for } n = 1, 3, 5, \dots \\ &= 0 \quad \text{for } n = 2, 4, 6, 8, \dots \end{aligned} \right\} (4)$$

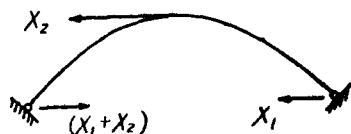
図-1のアーテスパンは不変であるから常に、

$$\Delta l_a \Big|_0^l = \sum_{x=0}^{x=l} \Delta X = 0 \quad (5)$$

である。今の場合 $n = 2, 6, 10, \dots$ に対して Δl_a の式(2)の右辺 α -項は式(4)に示すように0であるから、 α -項のみが残る。水平拘束力を X_2 とすれば、アーテの水平反力は図-2のようになる。ゆえに

$$\begin{aligned} \Delta l_a \Big|_0^l &= \sum_{x=0}^{x=l} \Delta S \sec \alpha \\ &= \int_0^l \frac{1}{2} \frac{(X_1 + X_2) \sec^3 \alpha}{A_a E} dx + \int_{l/2}^l \frac{1}{2} \frac{X_1 \sec^3 \alpha}{A_a E} dx \\ &= \int_0^l \frac{X_1}{A_a E} \sec^3 \alpha dx + \int_0^{l/2} \frac{X_2}{A_a E} \sec^3 \alpha dx \\ &= 0 \\ \therefore 2X_1 + X_2 &= 0 \quad (6) \end{aligned}$$

図-2 拘束力と反力



次に、 $n = 2, 6, 10, \dots$ の変形するときアーテクラウンの水平変位と補剛材の伸びが等しいから、この条件式をつくると、

$$\frac{X_2 \cdot \frac{l}{2}}{A_g E} = \sum_{x=0}^{x=l/2} \Delta x = \int_0^{l/2} \tan \alpha \cdot d\varphi - \int_0^{l/2} \Delta S \sec \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{式(3)を参照して} \quad &= \frac{16f}{l} \sum_n \frac{Q_n}{n\pi} - (X_1 + X_2) \int_0^{l/2} \frac{\sec^3 \alpha}{A_a E} dx \\ &= \frac{16f}{l} \sum_n \frac{Q_n}{n\pi} - (X_1 + X_2) \cdot \frac{l}{2} \left[1 + 8 \left(\frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left(\frac{f}{l} \right)^4 \right] \quad (7) \end{aligned}$$

式(6)と(7)から

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -X_2/2 \\ X_2 &= \frac{16EfB^*}{\pi l^2} \sum_n \frac{Q_n}{n} \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\text{ここに } B^* = 4A_a A_g / \left\{ 2A_a + A_g \left(1 + 8 \left(\frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left(\frac{f}{l} \right)^4 \right) \right\}$$

$n = 2, 6, 10, \dots$ よりなる振動モード $\varphi(x) = \sum_{n=2,6,10,\dots} Q_n \sin(n\pi x/l)$ で自由振動するとき、アーテは放物線であるから、クラウンの左右では等大逆向き(スパンの半分部では下向、地の半分部では上向)の等分布周期力 P_0 が補剛材に、アーテにも同様な等分布周期力 P_0 が働くことになる。このとき静力学的に次の関係がある。

$$P_n = \frac{X_2}{Z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

式(10)より

$$= \frac{64 E f^2 B'}{\pi l^4} \sum \frac{Q_n}{n} \quad (9)$$

一方、等分布周期力 $P_n \sin \omega t$ が free body の補剛筋に効くときのたわみ $w(x)$ は、補剛筋のみに質量を考えると、

$$\ddot{w} + \omega_{gn}^2 w = \Phi_{gn}(x) \int \Phi_{gn}(x) P_n dx \sin \omega t \quad (10)$$

を解いて次式となる。

$$w(x) = \sum \frac{\Phi_{gn}(x)}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \int \Phi_{gn}(x) P_n dx \quad (11)$$

ここに、 ω_{gn} 、 Φ_{gn} はそれぞれ補剛筋のみの固有円振動数、正規化した固有振動モード。式(11)の積分は、 $\frac{1}{2}$ 英の左右で P_n の向きが異なるので二項に分けると、

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum \frac{\Phi_{gn}(x)}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \left\{ \int_0^{1/2} \Phi_{gn}(x) P_n dx - \int_{1/2}^1 \Phi_{gn}(x) P_n dx \right\} \\ &= \sum_{n=2,6,10} \frac{\partial P_n}{\pi \rho (\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \quad (12)$$

式(9)の Q_n は式(12)の $(w_n)_{\max}$ に対応するから、式(9)に式(11)の最大値を入れると

$$P_n = \sum P_{an} = \frac{64 E f^2 B'}{\pi l^4} \sum \frac{1}{n} \frac{\partial P_n}{\pi \rho (\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \quad (13)$$

式(12)は free body のアーチに P_n を、free body の補剛筋に P_n を効かせ両者の変形が等しいという条件から導かれた式である。アーチと補剛筋が一体となって自由振動するとき外力は効かないから、

$$P_n + P_n = 0 \quad (14)$$

式(14)に式(13)を入れると、 $n = 2, 6, 10, \dots$ の形で振動するときの振動数方程式(14)が得られる。

$$1 + \frac{512 E f^2 B'}{\pi^2 l^4 \rho} \sum_{n=2,6,10} \frac{1}{n^2 (\omega_{gn}^2 - \omega^2)} = 0 \quad (15)$$

ここに B' は式(8)参照。式(15)より ω_m を求め式(12)に入れると m 次の振動モードの式(16)が得られる。

$$\varphi_m(x) = \sum_{n=2,6,10} \frac{1}{n (\omega_{gn}^2 - \omega_m^2)} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (16)$$

ここで、既に知られている対称振動、逆対称振動 ($n = 4, 8, \dots$) について併記しておこう。対称振動では $n = 1, 3, 5, \dots$ であるから、振動数方程式は

$$1 + \frac{512 E f^2 B'}{\pi^2 l^4 \rho} \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{n^2 (\omega_{gn}^2 - \omega^2)} = 0 \quad (17)$$

ここに $B = A_0 / \left\{ 1 + 8 \left(\frac{l}{l} \right)^2 + 19.2 \left(\frac{l}{l} \right)^4 \right\}$

$$\text{振動モード} \quad \varphi_m(x) = \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{n (\omega_{gn}^2 - \omega_m^2)} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (18)$$

逆対称振動のとき $n = 4, 8, 12, \dots$ ではアーチの軸力が効かずに補剛筋のみの振動となり

$$\omega_m = \omega_{gm} = \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_1}{\rho}} \quad (19)$$

$$\Phi_m = \sqrt{\frac{2}{\rho l}} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (20)$$

逆ローゼ, 上路式2ヒンジアーチの動的解析については文献(2)の記述にバウッマ式(15)~(20)を少しく修正すればよい。

2. 数値計算

下路の戸崎ランガー橋の諸元を用いてそのまま逆ランガー橋とし, 水平に弾性拘束を与えた場合を解き ω を比較すると表-1の通り。

表-1 ω の比較 (rad/sec)

次数	下路	上路無拘束	上路弾性拘束	上路完全拘束
1	7.374	8.119	8.119	
3	10.287	11.499	11.499	
5	25.904	25.940	25.940	
2	4.136	4.136	7.975	10.794
4	16.542	16.542	16.542	
6	37.220	37.220	37.294	37.386

また, $\frac{1}{4}$ 点のたわみの影響線と比較すると図-3の通り。

および

上路式の逆ランガー橋, 逆ローゼ時, 2ヒンジアーチ橋が水平弾性拘束を与えたときの動的解析の基礎式を誘導し, 逆対称一次振動数が弾性拘束のときと無拘束のそれと比べると約2倍位に高くなることが知られ, また $\frac{1}{4}$ 点の影響係数が約30%小さくなり格段に剛性上がるということが知られた。

(注)

(1) 吉村, 田久, 瀬テロ, 水平変位の拘束による2ヒンジアーチの動的, 静的挙動, 土木学会年次講演会, (S. 42.5)

(2) 吉村, 平井, 補剛アーチ橋およびつり橋の動的挙動解析, 土木学会論文集才 115号 (S. 40.3)

(3) 吉村, 平井, ランガー橋の動的解析, 同上才 101号 (S. 39.1)

