

九州大学工学部 正員 山崎徳也

准員 山崎山毅

1. 序言 自動車専用の高速高架道路の発達に伴い、曲線橋とともに、ランプや橋梁が多数建設されるようになった。また構造物の設計理論はますます合理性を増してきており、経済性を更に追求する意味からも設計時に必要以上に余分の猶豫を見込むというニーズはなくなつていいであろう。その結果、構造物は slender なものが多くなり、したがってその動的安定性の検討というニーズが一つの重要な問題となつてくる。

走行荷重に対する直線梁の動的応答に関する研究としては、単純梁の動的たわみを求めた三瀬、国井<sup>(1)</sup>あるいは平井<sup>(2)</sup>らの研究あるいは種々の境界条件を有する梁の解を求めた著者ら<sup>(3)</sup>の研究等がある。本論文は曲線橋の中でも最も一般的な円形曲り梁を対象にして、その走行荷重に対する動的応答と解法についてものである。

2. 円形曲り梁の基本式 円形曲り梁に作用する外力すなわち鉛直荷重(度)およびねじれモーメント(荷重)をとれどれず、 $m$ を表わし、二種類の外力によつて生ずる梁の変形量すなわち鉛直たわみ、たわみ角およびねじれ角をとれどれず $w$ 、 $\psi$ 、 $\theta$ とすれば、二種類の変形量と荷重(度)との間に(1)次の直立微分方程式が成立する。

$$\frac{d^4w}{d\theta^4} - \mu \frac{d^2w}{d\theta^2} + (1+\mu) \frac{d^2\psi}{d\theta^2} - \frac{R^4}{EI} g = 0 \quad (1)$$

$$(1+\mu) \frac{d^2w}{d\theta^2} - \mu \frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \psi - \frac{R^3}{EI} m = 0 \quad (2)$$

ただし  $R$  = 円形曲り梁の曲率半径、 $\psi = R\dot{\theta}$ 、 $\mu = EI/GJ$

$EI, GJ$  = 円形曲り梁の曲げ剛性およびねじれ剛性

式(1)、(2)より $\psi$ を消去すれば、鉛直変位 $w$ に関する次の微分方程式を得る。

$$\frac{d^6w}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4w}{d\theta^4} + \frac{d^2w}{d\theta^2} = \frac{R^4}{EI} \left( \frac{d^2g}{d\theta^2} - \frac{g}{\mu} \right) + \frac{1+\mu}{\mu} \frac{R^3}{EI} \frac{d^2m}{d\theta^2} \quad (3)$$

式(3)より鉛直たわみ $w$ や求まれば次の諸式により他の変形量 $\bar{\psi} = R\dot{\theta}$ 、 $\bar{w}$ および応力量すなわち曲げモーメント $M$ 、ねじれモーメント $T$ およびせん断力 $Q$ が求められる。

$$\bar{\psi} = w' \quad (4)$$

$$\bar{w} = -\frac{\mu}{1+\mu} w^{(4)} - \frac{1+2\mu}{1+\mu} w'' + \frac{\mu}{1+\mu} \frac{R^4}{EI} g + \frac{R^3}{EI} m \quad (5)$$

$$M = -\frac{EI}{R^2} (w'' + \bar{\psi}) \quad (6)$$

$$T = \frac{GJ}{R^2} (\bar{\psi}' - w') \quad (7)$$

$$Q = -\frac{EI}{R^3} [w''' - \mu w' + (1+\mu) \bar{\psi}'] \quad (8)$$

式(1)～(8)の詳細は(4)を参照されたい。

3. 円形曲り梁の自由振動 曲り梁の単位長当たりの質量を $P$ とし、ねじれ回転慣性を無視すれば、

$$g = -P \frac{d^2w}{dt^2} \quad m = 0$$

これらを式(3)に代入すれば次の如く円形曲り梁の自由振動の基礎方程式が得られる。

$$\frac{\partial^6 W}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\rho R^4}{EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} - \frac{W}{\mu} \right) = 0 \quad (9)$$

$\therefore \omega = \omega(\theta, t) = W(\theta) \sin \omega t$  とおいて式(9)に代入し変数を分離すれば規準函数Wに因する次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^6 W}{d \theta^6} + 2 \frac{d^4 W}{d \theta^4} + (1 - \lambda^4) \frac{d^2 W}{d \theta^2} + \frac{\lambda^4}{\mu} W &= 0 \\ \lambda^4 &= \frac{\rho \omega^2 R^4}{EI} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし  $\omega$  は円形曲り梁の固有角振動数である。式(10)の一般解は  $0 < \lambda \mu < 2.6$  のとき  $\lambda^4 > 24.69$  の範囲では次式となる。

$$W = C_1 \cosh X\theta + C_2 \sinh X\theta + C_3 \cosh Y\theta + C_4 \sinh Y\theta + C_5 \cos Z\theta + C_6 \sin Z\theta \quad (11)$$

式(11)中の定数X, Y, Zは次の各式にて算定される。

$$\left. \begin{aligned} X^6 + 2X^4 + (1 - \lambda^4)X^2 + \frac{\lambda^4}{\mu} &= 0 & Y^6 + 2Y^4 + (1 - \lambda^4)Y^2 + \frac{\lambda^4}{\mu} &= 0 \\ X^6 - 2Z^4 + (1 - \lambda^4)Z^2 - \frac{\lambda^4}{\mu} &= 0 & (X, Y, Z > 0) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

また、たゆみ角 $\varphi$ 、ねじれ角 $\psi$ および曲げモーメントMの規準函数を表せば、 $\bar{W}$ 、 $\bar{X}$ 、 $\bar{Y}$ 、 $\bar{Z}$ と表わせば

$$\bar{W} = \bar{W}' \quad (13)$$

$$\bar{W} = -\frac{\mu}{1+\mu} \bar{W}^{(4)} - \frac{1+2\mu}{1+\mu} \bar{W}'' + \frac{\mu}{1+\mu} \lambda^4 \bar{W} \quad (14)$$

$$\bar{M} = \frac{EI}{R^2} \frac{\mu}{1+\mu} [\bar{W}^{(4)} + \bar{W}'' - \lambda^4 \bar{W}] \quad (15)$$

円形曲り梁の中心角 $\alpha$ とすれば両端部が単純支持された梁の境界条件は次式で与えられる。

$$W(0) = \bar{W}(0) = \bar{M}(0) = W(\alpha) = \bar{W}(\alpha) = \bar{M}(\alpha) = 0$$

これららの条件式(は式(13)~(15)と併わせ考えれば、次式と同値であることがわかる。

$$W(0) = W''(0) = \bar{W}^{(4)}(0) = \bar{W}(\alpha) = W''(\alpha) = \bar{W}^{(4)}(\alpha) = 0 \quad (16)$$

また、式(16)より次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} W \\ W' \\ W'' \\ W''' \\ W^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh X\theta & \sinh X\theta & \cosh Y\theta & \sinh Y\theta & \cos Z\theta & \sin Z\theta \\ X \sinh X\theta & X \cosh X\theta & Y \sinh Y\theta & Y \cosh Y\theta & -Z \sin Z\theta & Z \cos Z\theta \\ X^2 \cosh X\theta & X^2 \sinh X\theta & Y^2 \cosh Y\theta & Y^2 \sinh Y\theta & -Z^2 \cos Z\theta & -Z^2 \sin Z\theta \\ X^3 \sinh X\theta & X^3 \cosh X\theta & Y^3 \sinh Y\theta & Y^3 \cosh Y\theta & Z^3 \sin Z\theta & -Z^3 \cos Z\theta \\ X^4 \cosh X\theta & X^4 \sinh X\theta & Y^4 \cosh Y\theta & Y^4 \sinh Y\theta & Z^4 \cos Z\theta & Z^4 \sin Z\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} \quad (17)$$

したがって  $\cosh X\theta = \cosh X\alpha$ ,  $\sinh X\theta = \sinh X\alpha$ ,  $\dots$ ,  $\cos Z\theta = \cos Z\alpha$ ,  $\sin Z\theta = \sin Z\alpha$

したがって式(16)および(17)より、積分定数  $C_1, C_2, \dots, C_6$  を未知数とする次の連立方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ X^2 & 0 & Y^2 & 0 & -Z^2 & 0 \\ X^4 & 0 & Y^4 & 0 & Z^4 & 0 \\ \cosh X\alpha & \sinh X\alpha & \cosh Y\alpha & \sinh Y\alpha & \cos Z\alpha & \sin Z\alpha \\ X^2 \cosh X\alpha & X^2 \sinh X\alpha & Y^2 \cosh Y\alpha & Y^2 \sinh Y\alpha & -Z^2 \cos Z\alpha & -Z^2 \sin Z\alpha \\ X^4 \cosh X\alpha & X^4 \sinh X\alpha & Y^4 \cosh Y\alpha & Y^4 \sinh Y\alpha & Z^4 \cos Z\alpha & Z^4 \sin Z\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

式(18)は次の如く未知数  $C_1, C_3, C_5$  は(19)すす連立方程式(19)と未知数  $C_2, C_4, C_6$  は(20)すす連立方程式(20)とに分離できる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X^2 & Y^2 & Z^2 \\ X^4 & Y^4 & Z^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19) \quad \begin{bmatrix} \sin X\alpha & \sin Y\alpha & \sin Z\alpha \\ X^2 \sin X\alpha & Y^2 \sin Y\alpha & Z^2 \sin Z\alpha \\ X^4 \sin X\alpha & Y^4 \sin Y\alpha & Z^4 \sin Z\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X^2 & Y^2 & Z^2 \\ X^4 & Y^4 & Z^4 \end{vmatrix} = X^2 Y^2 (Y^2 - X^2) + Z^4 (Y^2 - X^2) + Z^2 (Y^4 - X^4) \neq 0$$

$$(\because X \neq Y, X, Y, Z > 0)$$

であることを考慮すれば式(19)より  $C_1 = C_3 = C_5 = 0$  なる結果を得、また式(20)より

$$\sin Z\alpha = 0 \quad (21)$$

なる方程式を得る。式(21)が両端単純支持円形曲り梁の振動方程式である。式(21)より

$$Z = \frac{n\pi}{\alpha} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (22)$$

式(12)の第3式に式(22)を代入すれば、次の如く所要の曲り梁の固有値が得られる。

$$\lambda^4 = \frac{\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 \left[\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 - 1\right]^2}{\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 + \frac{EI}{PL^4}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (23)$$

したがって 固有角振動数  $\omega$  (は式(10)の第2式より)

$$\omega = \frac{\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right) \left[\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 - 1\right]}{\left[\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 + \frac{EI}{PL^4}\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{PR^4}} = \frac{(n\pi) \left[(n\pi)^2 - \alpha^2\right]}{\left[(n\pi)^2 + \alpha^2/\mu\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{PL^4}} \quad (24)$$

ただし  $L$  は曲り梁の部材長で  $L=R\alpha$  なる関係を有する。

(1) 部材長  $L$  を一定にして 中心角  $\alpha$  を 0 に近づければ曲り梁は直線梁に近づく。式(24)において  $\alpha \rightarrow 0$  とすれば固有角振動数  $\omega$  は  $(n\pi/L)^2 \cdot (EI/\rho)^{\frac{1}{2}}$  なる極限値を有するが、これは直線材の単純梁の固有角振動数と一致するものである。

次に式(24)より積分定数  $C_6$  を消去すれば

$$\begin{bmatrix} (X^2+Z^2)(X^2-Z^2) & (Y^2+Z^2)(Y^2-Z^2) \\ X^2(X^2+Z^2) & Y^2(Y^2+Z^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin X\alpha \cdot C_2 \\ \sin Y\alpha \cdot C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

なる連立方程式が得られ、これより  $C_2 = C_4 = 0$  なる結果を得る。また積分定数  $C_1, C_3, C_5$  も 0 となるから結局両端が単純支持された円形曲り梁の振動モード  $\bar{W}$  として式(11)より次式が得られる。

$$\bar{W} = C \cdot \sin Z\theta = C \cdot \sin n\pi \frac{\theta}{\alpha} \quad (25)$$

4. 走行荷重に対する動的応答 円形曲り梁上  $\theta = \beta$  处に集中荷重  $P$  が作用する場合の荷重強度  $\gamma$  (は正) フーリエ級数によつて次のように展開される。

$$\gamma = \frac{2P}{R\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi\beta}{\alpha} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha}$$

(1) 集中荷重  $P$  が  $\theta = 0$  处より一定速度  $\omega_0 = \pi/R$  で移動しはじめたとすると時間  $t$  後の集中荷重の位置は  $\theta = \omega_0 t$  である。したがつて曲り梁上に集中荷重  $P$  が一定速度で移動する場合、任意時刻、位置  $\theta$  における荷重強度  $\gamma$  は次式で与えられることになる。

$$\gamma = \frac{2P}{R\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi\omega_0 t}{\alpha} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \quad (26)$$

式(26)を式(3)に代入し慣性力を考慮すれば走行荷重による円形曲り梁の強制振動を表わす次式を得る。

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{P R^4 \partial^2}{EI} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{w}{\mu} \right) = \frac{2 P R^3}{EI \alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{m\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \right] \sin \frac{m\pi w_0}{\alpha} \sin \frac{m\pi \theta}{\alpha} \quad (27)$$

式(27)を解けば走行荷重に対する動的たわみとして次式が得られる。

$$W = \frac{2 P R^3}{EI} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha \lambda_m^4} \cdot \frac{1}{\left[ 1 - \left( \frac{m\pi w_0}{\alpha \omega_m} \right)^2 \right]} \left\{ \sin \frac{m\pi w_0}{\alpha} \sin m\pi \theta - \sin \frac{m\pi w_0}{\alpha} t \right\} \sin \frac{m\pi \theta}{\alpha} \quad (28)$$

5. 敷値計算および考察 算出した式(28)により 中心角  $\alpha = 60^\circ$ 、 $GJ/EI = 1.0$  の円形曲り梁上を集中荷重  $P$  が定速で走行する場合の梁の中央点の鉛直たわみ  $W$  を速度  $\frac{\lambda^2 w_0}{\omega_m} = 0.1, 0.3, \dots$  に対して算定し、図-1に示す結果を得た。図中実線は速度  $\frac{\lambda^2 w_0}{\omega_m} = 0$  に対する中央点の鉛直たわみを表わすもので、いわゆる中央点のたわみ影響線である。

中央点のたわみ影響線  $W_1$  は次式にて表わされる。

$$W_1 = \frac{2 P L^3}{EI} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m\pi)^2} \cdot \frac{1}{A_m^2} \cdot \sin \frac{m\pi}{2} \cdot \sin m\pi T, \quad \frac{1}{A_m^2} = \frac{(m\pi)^2 + \alpha^2}{[(m\pi)^2 - \alpha^2]^2}, \quad T = \frac{\omega_m t}{\alpha}$$

また中央点の動的たわみ  $W_2$  は式(28)より、次式で与えられる。

$$W_2 = \frac{2 P L^3}{EI} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m\pi)^2} \cdot \frac{1}{A_m^2 - k^2} \cdot \sin \frac{m\pi}{2} \left\{ \sin m\pi T - \frac{k}{A_m} \sin \frac{(m\pi) A_m}{k} T \right\}, \quad k = \frac{\lambda_m^2 w_0}{\omega_m}$$

$$\therefore W_2 - W_1 = \frac{2 P L^3}{EI} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{k}{A_m} \right)^2 \frac{1}{(m\pi)^2 - A_m^2 - k^2} \sin \frac{m\pi}{2} \left\{ \sin m\pi T - \frac{A_m}{k} \sin \frac{(m\pi) A_m}{k} T \right\}$$

図-2は上式の値 ( $W_2 - W_1$ ) をプロットしたもので、円形曲り梁の集中荷重  $P$  に対する静的平衡状態を基準として動的たわみと意味する。これによれば梁の中央点は荷重の走行中、静的平衡状態を基準にして単純振動に近い運動を行うこと、またとの周期及び振幅は走行速度により種々異なることなどがわかる。

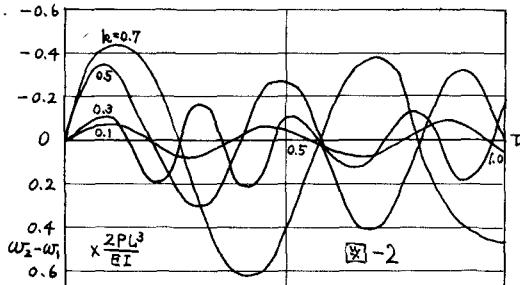


図-2

6. 結語 両端部が単純支持された円形曲り梁の走行荷重に対する動的応答の解析を行ったが、他の境界条件を有する場合でも全く同様の手法で解を得ることができる。

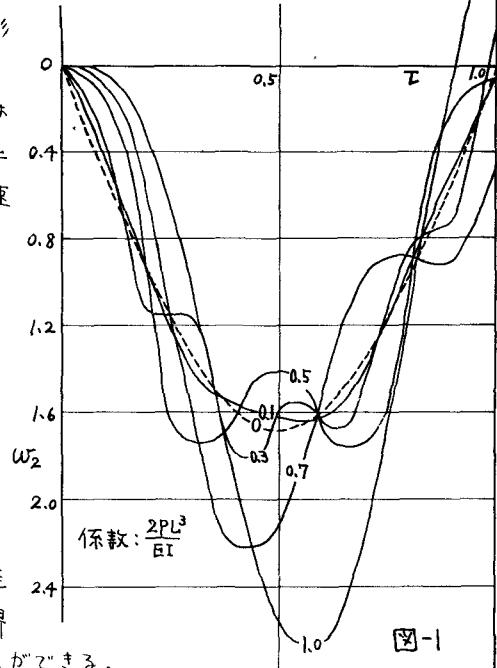


図-1

- (1)三瀬幸三郎・国井修二郎「走行荷重による橋脚の強制振動論」九大論叢報第11943 (2)平井一男「種々の移動荷重と構造物構造の基礎方程式との応用」土木学会論文集90(BB38-2) (3)山崎徳也・崎山毅「種々の境界条件と荷重直線梁の走行荷重による強制振動」九大工集41巻1号 (4)山崎徳也・崎山毅「円形曲り梁の角外自由振動」九大工集40巻2号