

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\rho R^4}{EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{w}{\mu} \right) = 0 \quad (9)$$

ここで $w(\theta, t) = W(\theta) \sin \omega t$ とおいて式(9)に代入し変数を分離すれば標準函数 W に関する次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^6 W}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 W}{d\theta^4} + (1 - \lambda^4) \frac{d^2 W}{d\theta^2} + \frac{\lambda^4}{\mu} W &= 0 \\ \lambda^4 &= \frac{\rho \omega^2 R^4}{EI} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし ω は円形曲り梁の固有角振動数である。式(10)の一般解は $0 < \lambda \mu < 2.6$ のとき $\lambda^4 > 24.69$ の範囲では次式となる。

$$W = C_1 \cosh X\theta + C_2 \sinh X\theta + C_3 \cosh Y\theta + C_4 \sinh Y\theta + C_5 \cos Z\theta + C_6 \sin Z\theta \quad (11)$$

式(11)中の定数 X, Y, Z は次の各式にて算定される。

$$\left. \begin{aligned} X^6 + 2X^4 + (1 - \lambda^4)X^2 + \frac{\lambda^4}{\mu} &= 0 & Y^6 + 2Y^4 + (1 - \lambda^4)Y^2 + \frac{\lambda^4}{\mu} &= 0 \\ Z^6 - 2Z^4 + (1 - \lambda^4)Z^2 - \frac{\lambda^4}{\mu} &= 0 & (X, Y, Z > 0) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

また、たわみ角 $\bar{\psi}$ 、ねじれ角 $\bar{\phi}$ および曲げモーメント M の標準函数をそれぞれ $\bar{\psi}, \bar{\phi}, \bar{M}$ で表わせば

$$\bar{\psi} = W' \quad (13)$$

$$\bar{\phi} = -\frac{\mu}{1+\mu} W^{(4)} - \frac{1+2\mu}{1+\mu} W'' + \frac{\mu}{1+\mu} \lambda^4 W \quad (14)$$

$$\bar{M} = \frac{EI}{R^2} \frac{\mu}{1+\mu} [W^{(4)} + W'' - \lambda^4 W] \quad (15)$$

円形曲り梁の中心角を α とすれば両端部が単純支持された梁の境界条件は次式で与えられる。

$$W(0) = \bar{\psi}(0) = \bar{M}(0) = W(\alpha) = \bar{\psi}(\alpha) = \bar{M}(\alpha) = 0$$

これらの条件式は式(13)~(15)を併せ考えれば、次式と同値であることがわかる。

$$W(0) = W''(0) = W^{(4)}(0) = W(\alpha) = W''(\alpha) = W^{(4)}(\alpha) = 0 \quad (16)$$

また、式(11)より次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} W \\ W' \\ W'' \\ W''' \\ W^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh X\theta & \sinh X\theta & \cosh Y\theta & \sinh Y\theta & \cos Z\theta & \sin Z\theta \\ X \cosh X\theta & X \sinh X\theta & Y \cosh Y\theta & Y \sinh Y\theta & -Z \sin Z\theta & Z \cos Z\theta \\ X^2 \cosh X\theta & X^2 \sinh X\theta & Y^2 \cosh Y\theta & Y^2 \sinh Y\theta & -Z^2 \cos Z\theta & -Z^2 \sin Z\theta \\ X^3 \sinh X\theta & X^3 \cosh X\theta & Y^3 \sinh Y\theta & Y^3 \cosh Y\theta & Z^3 \sin Z\theta & -Z^3 \cos Z\theta \\ X^4 \cosh X\theta & X^4 \sinh X\theta & Y^4 \cosh Y\theta & Y^4 \sinh Y\theta & Z^4 \cos Z\theta & Z^4 \sin Z\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} \quad (17)$$

ただし $\cosh X\theta = \cosh X\theta$, $\sinh X\theta = \sinh X\theta$, ..., $\cos Z\theta = \cos Z\theta$, $\sin Z\theta = \sin Z\theta$

したがって式(16)および(17)より、積分定数 $C_1, C_2, \dots, C_6$ を未知数とする次の連立方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ X^2 & 0 & Y^2 & 0 & -Z^2 & 0 \\ X^4 & 0 & Y^4 & 0 & Z^4 & 0 \\ \cosh X\alpha & \sinh X\alpha & \cosh Y\alpha & \sinh Y\alpha & \cos Z\alpha & \sin Z\alpha \\ X^2 \cosh X\alpha & X^2 \sinh X\alpha & Y^2 \cosh Y\alpha & Y^2 \sinh Y\alpha & -Z^2 \cos Z\alpha & -Z^2 \sin Z\alpha \\ X^4 \cosh X\alpha & X^4 \sinh X\alpha & Y^4 \cosh Y\alpha & Y^4 \sinh Y\alpha & Z^4 \cos Z\alpha & Z^4 \sin Z\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

式(18)は次の如く未知数 C_1, C_3, C_5 に関する連立方程式(19)と未知数 C_2, C_4, C_6 に関する連立方程式(20)とに分離できる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X^2 & Y^2 & -Z^2 \\ X^4 & Y^4 & Z^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19) \quad \begin{bmatrix} \operatorname{sh} X\alpha & \operatorname{sh} Y\alpha & -\operatorname{sh} Z\alpha \\ X^2 \operatorname{sh} X\alpha & Y^2 \operatorname{sh} Y\alpha & -Z^2 \operatorname{sh} Z\alpha \\ X^4 \operatorname{sh} X\alpha & Y^4 \operatorname{sh} Y\alpha & Z^4 \operatorname{sh} Z\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X^2 & Y^2 & -Z^2 \\ X^4 & Y^4 & Z^4 \end{vmatrix} = X^2 Y^2 (Y^2 - X^2) + Z^4 (Y^2 - X^2) + Z^2 (Y^4 - X^4) \neq 0$$

($\because X \neq Y, X, Y, Z > 0$)

であることを考慮すれば式(19)より $C_1 = C_3 = C_5 = 0$ なる結果を得。また式(20)より

$$\sin Z\alpha = 0 \quad (21)$$

なる方程式を得る。式(21)が両端単純支持円形曲り梁の振動数方程式である。式(21)より

$$Z = \frac{n\pi}{\alpha} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (22)$$

式(2)の3式に式(22)を代入すれば、次の如く所要の曲り梁の固有値入が得られる。

$$\lambda^4 = \frac{\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 \left[\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 - 1\right]^2}{\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 + \frac{EI}{\rho J}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (23)$$

したがって固有角振動数 ω は式(10)の2式より

$$\omega = \frac{\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right) \left[\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 - 1\right]}{\left[\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 + \frac{EI}{\rho J}\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{EI}}{PR^4} = \frac{(n\pi) \left[(n\pi)^2 - \alpha^2\right]}{\left[(n\pi)^2 + \alpha^2/\mu\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{EI}}{\rho L^4} \quad (24)$$

ただし L は曲り梁の部材長で $L = R\alpha$ なる関係を有する。

1) 部材長 L を一定にして中心角 α を 0 に近づければ曲り梁は直線梁に近づく。式(24)において $\alpha \rightarrow 0$ とすれば固有角振動数 ω は $(n\pi/L)^2 \cdot (EI/\rho)^{\frac{1}{2}}$ なる極限值を有するが、これは直線材の単純梁の固有角振動数と一致するものである。

次に式(20)より積分定数 C_6 を消去すれば

$$\begin{bmatrix} (X^2 + Z^2)(X^2 - Z^2) & (Y^2 + Z^2)(Y^2 - Z^2) \\ X^2(X^2 + Z^2) & Y^2(Y^2 + Z^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{sh} X\alpha \cdot C_2 \\ \operatorname{sh} Y\alpha \cdot C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

なる連立方程式が得られ、これより $C_2 = C_4 = 0$ なる結果を得る。また積分定数 C_1, C_3, C_5 も 0 であるから結局両端が単純支持された円形曲り梁の振動モード W として式(11)より次式が得られる。

$$W = C \cdot \sin Z\theta = C \cdot \sin n\pi \frac{\theta}{\alpha} \quad (25)$$

4. 走行荷重に対する動的応答 円形曲り梁上 $\theta = \beta$ 点に集中荷重 P が作用する場合の荷重強度 q は正弦フーリエ級数によって次のように展開される。

$$q = \frac{2P}{R\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi\beta}{\alpha} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha}$$

1) 集中荷重 P が $\theta = 0$ 点より一定速度 $\omega_0 = v_0/R$ で移動しはじめたとすると時刻 t 後の集中荷重の位置は $\theta = \omega_0 t$ 点である。したがって曲り梁上を集中荷重 P が一定速度で移動する場合、任意時刻、任意位置の荷重強度 q は次式で与えられることになる。

$$q = \frac{2P}{R\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi\omega_0 t}{\alpha} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \quad (26)$$

式(24)を式(3)に代入し慣性力を考慮すれば走行荷重による円形曲り梁の強制振動を表わす次式を得る。

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{PR^4}{EI} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{w}{\mu} \right) = \frac{2PR^3}{EI\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \right] \frac{\sin \frac{n\pi \omega_0 \tau}{\alpha} \sin \frac{n\pi \theta}{\alpha}}{\alpha} \quad (27)$$

式(27)を解けば走行荷重に対する動的たわみとして次式が得られる。

$$w = \frac{2PR^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha \lambda_n^4} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{n\pi \omega_0}{\alpha \omega_n} \right)^2 \right]} \left\{ \frac{n\pi \omega_0}{\alpha \omega_n} \sin \omega_n t - \sin \frac{n\pi \omega_0}{\alpha} t \right\} \frac{\sin \frac{n\pi \theta}{\alpha}}{\alpha} \quad (28)$$

5. 数値計算および考察 算いた式(28)により 中心角 $\alpha = 60^\circ$ 、 $GJ/EI = 1.0$ の円形曲り梁上を集中荷重 P が定速で走行する場合の梁の中央点の鉛直たわみ w と速度 $\frac{\lambda_m^2 \omega_0}{\omega_n} = 0.1, 0.3, \dots$ に対して算定し、図-1 に示す結果を得た。図中実線は速度 $\frac{\lambda_m^2 \omega_0}{\omega_n} = 0$ に対する中央点の鉛直たわみを表わすもので、いわゆる中央点のたわみ影響線である。

中央点のたわみ影響線 w_1 は次式にて表わされる。

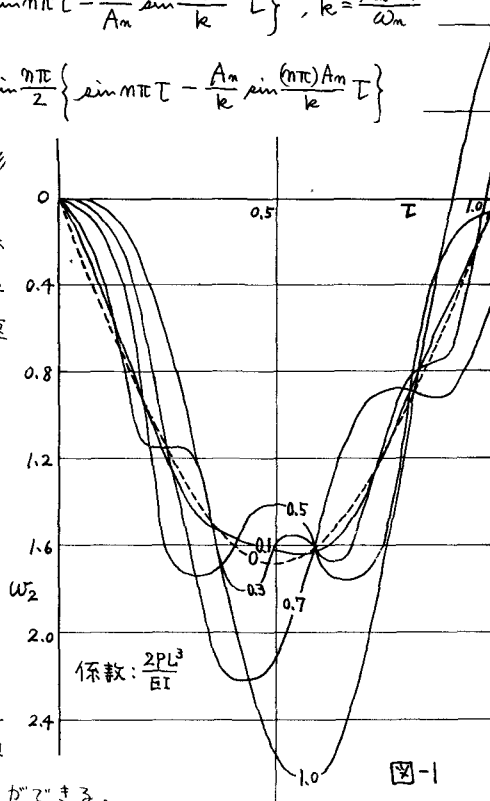
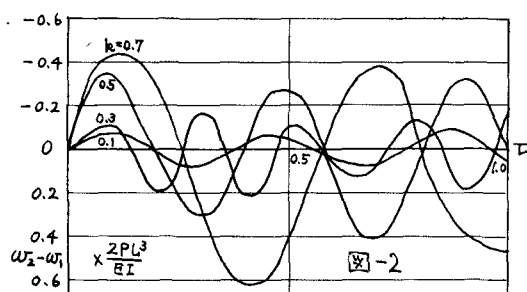
$$w_1 = \frac{2PL^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} \cdot \frac{1}{A_n^2} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{2} \cdot \sin n\pi \tau, \quad \frac{1}{A_n^2} = \frac{(n\pi)^2 + \frac{\alpha^2}{\mu}}{[(n\pi)^2 - \alpha^2]^2}, \quad \tau = \frac{\omega_0 t}{\alpha}$$

また中央点の動的たわみ w_2 は式(28)より、次式で与えられる。

$$w_2 = \frac{2PL^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} \cdot \frac{1}{A_n^2 - k^2} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{2} \left\{ \sin n\pi \tau - \frac{k}{A_n} \sin \left(\frac{n\pi}{k} A_n \right) \tau \right\}, \quad k = \frac{\lambda_m^2 \omega_0}{\omega_n}$$

$$\therefore w_2 - w_1 = \frac{2PL^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{A_n} \right)^2 \frac{1}{(n\pi)^2} \cdot \frac{1}{A_n^2 - k^2} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{2} \left\{ \sin n\pi \tau - \frac{A_n}{k} \sin \left(\frac{n\pi}{k} A_n \right) \tau \right\}$$

図-2 は上式の値 ($w_2 - w_1$) をプロットしたもので、円形曲り梁の集中荷重 P に対する静的平衡状態を基準として動的たわみを意味する。これによれば梁の中央点は荷重の走行中、静的平衡状態を基準にして単法振動に近い運動を行うこと、またその周期及び振幅は走行速度により種々異なることなどがわかる。



6. 結語 両端部が単純支持された円形曲り梁の走行荷重に対する動的応答の解析を行ったが、他の境界条件を有する場合でも全く同様の手法で解を得ることができる。

(1)三瀬孝三郎・国井修二郎「走行荷重による橋梁の強制振動論」九大研報計1 1943 (2)平井一男「種々の移動荷重をうけるはり構造の基礎方程式とその応用」土木学会論文集90(昭38.2) (3)山崎復也・崎山毅「種々の境界条件を有する直線梁の走行荷重による強制振動」九大工集41巻1号 (4)山崎復也・崎山毅「円形曲り梁の面外自由振動」九大工集40巻2号