

九州大学 正員 山崎徳也

シ 正員 ○彦坂 照

1. 緒言

鉄筋コンクリートおよびプレストレストコンクリート構造のクリープ応力に関する理論研究は古くから行われてきたが、これらほとんどすべては柱、はりのごとき単一部材およびラーメン構造などの単軸クリープを対象としたもので、スラブのごとき2次元応力状態のもとにある構造物のクリープを理論的に取り扱った研究は、わずかにシャイベに対する2次元クリープ問題を一般的に論じた坂・六車⁽⁴⁾のものがあるに過ぎない。本研究は、任意横荷重を受ける鉄筋コンクリート矩形スラブを対象として、まずクリープを考慮したたわみ曲面の微分方程式を誘導し、次いでこれを与えられた初期条件と境界条件のもとで解くことにより、任意時刻におけるスラブのたわみとコンクリートおよび鉄筋の応力をそれぞれ求めることとしたものである。

2. クリープを考慮したコンクリートの2次元応力-ひずみ関係式

いま材令 τ のコンクリートに任意の持続応力 $\sigma_c(t)$ が加えられたものとすれば、時刻 t におけるコンクリートの総ひずみ $\epsilon_c(t)$ は次式にて表わされる。(文献(5)の式(3)参照)。

$$\epsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c(t)} - \int_{t_0}^t \sigma_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{E_c(\tau)} + C(t, \tau) \right\} d\tau \quad (1)$$

ここに $E_c(\tau)$: 材令 τ のコンクリートの弾性係数

$C(t, \tau)$: 時刻 τ から時刻 t までの間に生じたクリープひずみ

したがって、任意直交軸 x および y に関する2次元応力状態におけるコンクリートの軸方向応力をそれぞれ $\sigma_{cx}(t)$ 、 $\sigma_{cy}(t)$ とすれば、これらの応力のもとで時刻 τ から時刻 t までに生ずるコンクリートの x 、 y 方向総ひずみ $\epsilon_{cx}(t)$ 、 $\epsilon_{cy}(t)$ は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{cx}(t) &= \frac{\sigma_{cx}(t) - \nu \sigma_{cy}(t)}{E_c(t)} - \int_{t_0}^t \left[\sigma_{cx}(\tau) - \nu \sigma_{cy}(\tau) \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{E_c(\tau)} + C(t, \tau) \right\} d\tau \\ \epsilon_{cy}(t) &= \frac{\sigma_{cy}(t) - \nu \sigma_{cx}(t)}{E_c(t)} - \int_{t_0}^t \left[\sigma_{cy}(\tau) - \nu \sigma_{cx}(\tau) \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{E_c(\tau)} + C(t, \tau) \right\} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし ν : コンクリートのポアソン比

creep function $C(t, \tau)$ の函数形は、文献(5)と同じく次式を用いるものとする。すなわち、

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad \varphi(\tau) = A_1/\tau + C_0 \quad (3)$$

ここに γ 、 A_1 および C_0 は任意定数。

式(2)に式(3)を代入し、両辺を t で2回微分して整理すれば、 $\sigma_{cx}(t)$ 、 $\sigma_{cy}(t)$ に関する次の2階連立常微分方程式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\sigma}_{cx}(t) - \nu \ddot{\sigma}_{cy}(t) + [\dot{\sigma}_{cx}(t) - \nu \dot{\sigma}_{cy}(t)] \left\{ \gamma [1 + \varphi(t) E_c(t)] - \dot{E}_c(t)/E_c(t) \right\} &= E_c(t) \left\{ \ddot{\epsilon}_{cx}(t) + \gamma \dot{\epsilon}_{cx}(t) \right\} \\ \ddot{\sigma}_{cy}(t) - \nu \ddot{\sigma}_{cx}(t) + [\dot{\sigma}_{cy}(t) - \nu \dot{\sigma}_{cx}(t)] \left\{ \gamma [1 + \varphi(t) E_c(t)] - \dot{E}_c(t)/E_c(t) \right\} &= E_c(t) \left\{ \ddot{\epsilon}_{cy}(t) + \gamma \dot{\epsilon}_{cy}(t) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

また $t = t_0$ における $\sigma_{cx}(t)$ 、 $\sigma_{cy}(t)$ の初期条件が次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{cx}(t_0) &= \frac{E_c(t_0)}{1-\nu^2} \left\{ \epsilon_{cx}(t_0) + \nu \epsilon_{cy}(t_0) \right\}, & \dot{\sigma}_{cx}(t_0) &= \frac{E_c(t_0)}{1-\nu^2} \left\{ \dot{\epsilon}_{cx}(t_0) + \nu \dot{\epsilon}_{cy}(t_0) - \gamma \varphi(t_0) E_c(t_0) \left\{ \epsilon_{cx}(t_0) + \nu \epsilon_{cy}(t_0) \right\} \right\} \\ \sigma_{cy}(t_0) &= \frac{E_c(t_0)}{1-\nu^2} \left\{ \epsilon_{cy}(t_0) + \nu \epsilon_{cx}(t_0) \right\}, & \dot{\sigma}_{cy}(t_0) &= \frac{E_c(t_0)}{1-\nu^2} \left\{ \dot{\epsilon}_{cy}(t_0) + \nu \dot{\epsilon}_{cx}(t_0) - \gamma \varphi(t_0) E_c(t_0) \left\{ \epsilon_{cy}(t_0) + \nu \epsilon_{cx}(t_0) \right\} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

他方 せん断応力 $\tau_{xy}(t)$ のもとのコンクリートのせん断ひずみ $\gamma_{xy}(t)$ とすれば、式(4)、(5)と同様に、 $\tau_{xy}(t)$ に関する2階常微分方程式および $t = t_1$ における初期条件が与えられる(式(6)、(7))のごとくえられる。

$$\ddot{\tau}_{xy}(t) + \dot{\tau}_{xy}(t) \left\{ \gamma [1 + \varphi(t) E_c(t)] - \dot{E}_c(t)/E_c(t) \right\} = \frac{E_c(t)}{2(1+\nu)} \left\{ \ddot{\gamma}_{xy}(t) + \gamma \dot{\gamma}_{xy}(t) \right\} \quad (6)$$

$$\text{初期条件: } \tau_{xy}(t_1) = \frac{E_c(t_1)}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}(t_1), \quad \dot{\tau}_{xy}(t_1) = \frac{E_c(t_1)}{2(1+\nu)} \left\{ \dot{\gamma}_{xy}(t_1) - \gamma \varphi(t_1) E_c(t_1) \dot{\gamma}_{xy}(t_1) \right\} \quad (7)$$

式(5)、(7)の初期条件のもとでそれぞれ式(4)、(6)の微分方程式を解けば、所要のクリープを考慮したコンクリートの2次元応力-ひずみ関係式が次式のごとく導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}(t) &= \sigma_{xx}(t_1) + \int_{t_1}^t e^{-\eta(\tau)} \left[\dot{\sigma}_{xx}(t_1) + \int_{t_1}^{\tau} \frac{E_c(\tau)}{1-\nu^2} \left\{ \ddot{\epsilon}_{xx}(\tau) + \gamma \dot{\epsilon}_{xx}(\tau) + \nu (\ddot{\epsilon}_{cy}(\tau) + \gamma \dot{\epsilon}_{cy}(\tau)) \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau \\ \sigma_{yy}(t) &= \sigma_{yy}(t_1) + \int_{t_1}^t e^{-\eta(\tau)} \left[\dot{\sigma}_{yy}(t_1) + \int_{t_1}^{\tau} \frac{E_c(\tau)}{1-\nu^2} \left\{ \ddot{\epsilon}_{cy}(\tau) + \gamma \dot{\epsilon}_{cy}(\tau) + \nu (\ddot{\epsilon}_{xx}(\tau) + \gamma \dot{\epsilon}_{xx}(\tau)) \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau \\ \tau_{xy}(t) &= \tau_{xy}(t_1) + \int_{t_1}^t e^{-\eta(\tau)} \left[\dot{\tau}_{xy}(t_1) + \int_{t_1}^{\tau} \frac{E_c(\tau)}{2(1+\nu)} \left\{ \ddot{\gamma}_{xy}(\tau) + \gamma \dot{\gamma}_{xy}(\tau) \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\text{ここに } \eta(\tau) = \int_{t_1}^{\tau} \left\{ \gamma [1 + \varphi(\tau) E_c(\tau)] - \dot{E}_c(\tau)/E_c(\tau) \right\} d\tau$$

3. クリープを考慮した鉄筋コンクリートスラブのたわみ曲面の微分方程式

図-1のごとく、矩形スラブの中立面内で、相隣る2辺に平行に直交軸 x および y を、またこれらに垂直下向きに z 軸をとり、鉄筋は x , y 軸に平行に配置されているものとする。鉄筋はクリープしないと仮定するゆえ、その x , y 方向の応力度 $\sigma_{xx}(t)$, $\sigma_{yy}(t)$ およびせん断応力度 $\tau_{xy}(t)$ はそれぞれ次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}(t) &= n(t) E_c(t) \epsilon_{xx}(t), & \sigma_{yy}(t) &= n(t) E_c(t) \epsilon_{yy}(t) \\ \tau_{xy}(t) &= \frac{n(t) E_c(t)}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}(t) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに $n(t) = E_s/E_c(t)$, E_s : 鉄筋のヤング係数, ρ_s : 鉄筋のポアソン比

いまスラブの単位長当りの曲げモーメントおよび捩りモーメントをそれぞれ M_x , M_y および M_{xy} , M_{yx} とおけば、任意の断面における平衡条件より次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{A_{cx}} \sigma_{xx}(t) z dA_{cx} + \int_{A_{cy}} \sigma_{xx}(t) z dA_{cy}, & M_y &= \int_{A_{cy}} \sigma_{yy}(t) z dA_{cy} + \int_{A_{cx}} \sigma_{yy}(t) z dA_{cx} \\ M_{xy} &= - \int_{A_{cx}} \tau_{xy}(t) z dA_{cx} - \int_{A_{cy}} \tau_{xy}(t) z dA_{cy}, & M_{yx} &= \int_{A_{cy}} \tau_{xy}(t) z dA_{cy} + \int_{A_{cx}} \tau_{xy}(t) z dA_{cx} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに A_{cx} , A_{cy} : x および y 方向の単位幅当りコンクリート断面積

A_{sx} , A_{sy} : x および y 方向の単位幅当り鉄筋断面積

スラブの z 方向のたわみを $w(t, x, y)$ とし、Bernoulli の平面保持の法則が成り立つもの(仮定すれば)弾性理論と全く同様に次式が成立する。

$$\epsilon_x(t) = -z \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y(t) = -z \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy}(t) = -2z \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x \partial y} \quad (11)$$

式(11)を式(8)、(9)に代入し、次いで式(8)、(9)を式(10)に代入して整理すれば、結局次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= - \frac{E_c(t_1)}{1-\nu^2} I_{cx} \left\{ \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2} \right\} - E_s I_{sx} \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2} - \frac{E_c(t_1)}{1-\nu^2} I_{cy} \left\{ \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2} \right\} - \gamma \varphi(t_1) E_c(t_1) \left\{ \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2} \right\} \\ &\quad + \int_{t_1}^t \left[e^{-\eta(\tau)} \left\{ \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2} \right\} + \gamma \left(\frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2} \right) \right] e^{\eta(\tau)} d\tau \\ M_y &= - \frac{E_c(t_1)}{1-\nu^2} I_{cy} \left\{ \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2} \right\} - E_s I_{sy} \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2} - \frac{E_c(t_1)}{1-\nu^2} I_{cx} \left\{ \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2} \right\} - \gamma \varphi(t_1) E_c(t_1) \left\{ \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2} \right\} \\ &\quad + \int_{t_1}^t \left[e^{-\eta(\tau)} \left\{ \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2} \right\} + \gamma \left(\frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2} \right) \right] e^{\eta(\tau)} d\tau \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{xy} &= \frac{E_c(\tau)}{1+\nu} I_{cx} \frac{\partial^2 w(\tau, x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{E_s - I_{cx}}{1+\nu_s} \frac{\partial^2 w(\tau, x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{E_c(\tau)}{1+\nu} I_{cx} \left\{ \frac{\partial^2 w(\tau, x, y)}{\partial x \partial y} - r \varphi(\tau) E_c(\tau) \frac{\partial^2 w(\tau, x, y)}{\partial x \partial y} \right\} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\eta(\tau)} d\tau \\ &+ \int_{\tau_0}^{\tau} \left[e^{\eta(\tau)} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{E_c(\tau)}{1+\nu} I_{cx} \left\{ \frac{\partial^2 w(\tau, x, y)}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 w(\tau, x, y)}{\partial x \partial y} \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau \\ M_{yx} &= -\frac{E_c(\tau)}{1+\nu} I_{cy} \frac{\partial^2 w(\tau, x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{E_s - I_{cy}}{1+\nu_s} \frac{\partial^2 w(\tau, x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{E_c(\tau)}{1+\nu} I_{cy} \left\{ \frac{\partial^2 w(\tau, x, y)}{\partial x \partial y} - r \varphi(\tau) E_c(\tau) \frac{\partial^2 w(\tau, x, y)}{\partial x \partial y} \right\} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\eta(\tau)} d\tau \\ &- \int_{\tau_0}^{\tau} \left[e^{\eta(\tau)} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{E_c(\tau)}{1+\nu} I_{cy} \left\{ \frac{\partial^2 w(\tau, x, y)}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 w(\tau, x, y)}{\partial x \partial y} \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ただし I_{cx}, I_{cy} : 鋼およびス軸に関するコンクリートの単位幅当り断面二次モーメント

I_{sx}, I_{sy} : 鋼およびス軸に関する鉄筋の単位幅当り断面二次モーメント

式(12)を断面力の釣合方程式

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} = -g(x, y) \quad (g(x, y) \text{ は荷重強度})$$

に代入して整理すれば、所要のクリープを考慮した鉄筋コンクリートスラブのたわみ曲面の微分方程式が次の式(13)のごとく導かれる。

$$\begin{aligned} D_{cx} \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial x^4} + D_{cy} \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial y^4} + \frac{D_{xy} + D_{yx}}{1+\nu_s} \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \{ [1 - r \varphi(\tau) E_c(\tau)] D_c(\tau) \left\{ \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} \right. \\ \left. + D_c(\tau) \left\{ \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{-\eta(\tau)} d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau} \left[e^{-\eta(\tau)} \int_{\tau_0}^{\tau} D_c(\tau) \left\{ \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} + r \left(\frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial y^4} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau = g(x, y) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{ここに } D_c(\tau) = \frac{E_c(\tau)}{1-\nu^2} I_{cx} = \frac{E_c(\tau)}{1-\nu_s^2} I_{cy}, \quad D_{sx} = E_s I_{sx}, \quad D_{sy} = E_s I_{sy}$$

4. 周辺単純支持された鉄筋コンクリートスラブのクリープを考慮した解法

式(13)を $t = \tau_0$ 回微分した後両辺に $e^{\eta(\tau)}$ を乗じ、再度両辺を t で微分して整理すれば次の $w(\tau, x, y)$ に関する偏微分方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \{ 1 + \mu_x(t) \} \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial x^4} + \{ 1 + \mu_y(t) \} \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial y^4} + \left\{ 2 + \frac{\mu_x(t) + \mu_y(t)}{1+\nu_s} \right\} \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \{ r \mu_x(t) [r \{ 1 + \varphi(t) E_c(t) - \dot{E}_c(t) / E_c(t) \}] \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial x^4} \right. \\ \left. + [r + \mu_y(t) \{ r [1 + \varphi(t) E_c(t) - \dot{E}_c(t) / E_c(t)] \}] \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial y^4} + \left\{ 2r + \frac{\mu_x(t) + \mu_y(t)}{1+\nu_s} \right\} [r \{ 1 + \varphi(t) E_c(t) - \dot{E}_c(t) / E_c(t) \}] \frac{\partial^4 w(\tau, x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{ただし } \mu_x(t) = D_{sx} / D_c(t), \quad \mu_y(t) = D_{sy} / D_c(t)$$

また $t = \tau_0$ における $w(\tau, x, y)$ の初期条件は、次の式(15)、(16)を解いてえられることとなる。

$$\{ 1 + \mu_x(\tau_0) \} \frac{\partial^4 w(\tau_0, x, y)}{\partial x^4} + \{ 1 + \mu_y(\tau_0) \} \frac{\partial^4 w(\tau_0, x, y)}{\partial y^4} + \left\{ 2 + \frac{\mu_x(\tau_0) + \mu_y(\tau_0)}{1+\nu_s} \right\} \frac{\partial^4 w(\tau_0, x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{g(\tau_0, y)}{D_c(\tau_0)} \quad (15)$$

$$\{ 1 + \mu_x(\tau_0) \} \frac{\partial^4 w(\tau_0, x, y)}{\partial x^4} + \{ 1 + \mu_y(\tau_0) \} \frac{\partial^4 w(\tau_0, x, y)}{\partial y^4} + \left\{ 2 + \frac{\mu_x(\tau_0) + \mu_y(\tau_0)}{1+\nu_s} \right\} \frac{\partial^4 w(\tau_0, x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = r \varphi(\tau_0) E_c(\tau_0) \left\{ \frac{\partial^4 w(\tau_0, x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(\tau_0, x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(\tau_0, x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} \quad (16)$$

ここに取り扱うスラブは周辺が単純支持されているものとし、式(14)の解が次の式(17)のごときNavier型の変数分離形でえられるものと仮定する。すなわち

$$w(\tau, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(\tau) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (17)$$

式(17)を式(14)に代入すれば、未知函数 $A_{mn}(\tau)$ に関する2階の常微分方程式が次式でえられる。

$$\ddot{A}_{mn}(\tau) + Q(\tau) \dot{A}_{mn}(\tau) = 0 \quad (18)$$

$$\text{ここに } Q(\tau) = \frac{r \{ m^2 + n^2 / \delta^2 \} + \{ r [1 + \varphi(\tau) E_c(\tau) - \dot{E}_c(\tau) / E_c(\tau)] \{ \mu_x^2(\tau) + \mu_y^2(\tau) a^2 / b^4 + m^2 n^2 \mu_x(\tau) \mu_y(\tau) \} a^2 / b^2 (1+\nu_s) \}}{m^4 \{ 1 + \mu_x(\tau) \} + n^4 \{ 1 + \mu_y(\tau) \} a^2 / b^4 + m^2 n^2 \{ 2 + \{ \mu_x(\tau) + \mu_y(\tau) \} / (1+\nu_s) \} a^2 / b^2}$$

式(18)の解は古典的求積法により容易に次式のごとく求められる。

$$A_{mn}(\tau) = A_{mn}(\tau_0) + \dot{A}_{mn}(\tau_0) \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\eta(\tau)} d\tau \quad (19)$$

式(19)の $A_{mn}(\tau_0)$, $\dot{A}_{mn}(\tau_0)$ は式(15)、(16)より次式にて与えられる。

$$\begin{aligned} A_{mn}(\tau_0) &= \frac{g_{mn} a^4}{\pi^4 D_c(\tau_0)} \frac{1}{m^4 \{ 1 + \mu_x(\tau_0) \} + n^4 \{ 1 + \mu_y(\tau_0) \} a^2 / b^4 + m^2 n^2 \{ 2 + \{ \mu_x(\tau_0) + \mu_y(\tau_0) \} / (1+\nu_s) \} a^2 / b^2} \\ \dot{A}_{mn}(\tau_0) &= \frac{r \varphi(\tau_0) E_c(\tau_0) \{ m^2 + n^2 a^2 / b^2 \}^2}{m^4 \{ 1 + \mu_x(\tau_0) \} + n^4 \{ 1 + \mu_y(\tau_0) \} a^2 / b^4 + m^2 n^2 \{ 2 + \{ \mu_x(\tau_0) + \mu_y(\tau_0) \} / (1+\nu_s) \} a^2 / b^2} \end{aligned}$$

ただし g_{mn} は $g(x, y)$ の二重フーリエ正弦級数への展開係数、 $(g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y)$
 よって式(17)の $w(t, x, y)$ は次式で表わされることになる。

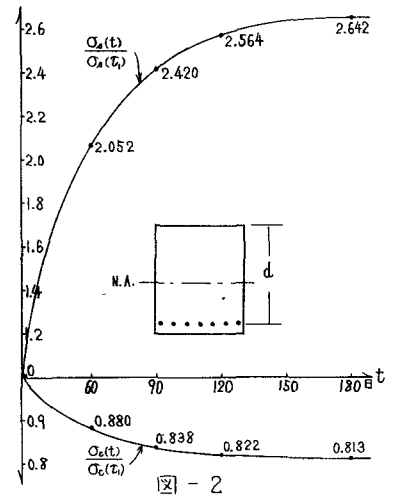
$$w(t, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \left[1 + \frac{\gamma \varphi(\tau) E_c(\tau) (m^2 + n^2 a^2/b^2)^2}{m^4 \{1 + \mu_x(\tau)\} + n^4 \{1 + \mu_y(\tau)\} a^4/b^4 + m^2 n^2 \{2 + \{\mu_x(\tau) + \mu_y(\tau)\}/(1 + \nu)\} a^2/b^2} \int_0^t e^{-Q(\tau)} d\tau \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (20)$$

式(20)を用いて式(11)の $\varepsilon_x(t)$, $\varepsilon_y(t)$, $\gamma_{xy}(t)$ をそれぞれ算定した後これらを式(8), (9)に代入すればコンクリートおよび鉄筋のクリープ応力が求められる。せん断応力は省略して垂直応力の結果のみ記せば次式のごとくである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}(t) &= \frac{E_c(t)}{1-\nu^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 \left[1 - \frac{\gamma \varphi(\tau) E_c(\tau) \{m^4 \mu_x(\tau) + n^4 \mu_y(\tau) a^4/b^4 + m^2 n^2 \{\mu_x(\tau) + \mu_y(\tau)\} a^2/b^2\}}{m^4 \{1 + \mu_x(\tau)\} + n^4 \{1 + \mu_y(\tau)\} a^4/b^4 + m^2 n^2 \{2 + \{\mu_x(\tau) + \mu_y(\tau)\}/(1 + \nu)\} a^2/b^2} \int_0^t e^{-Q(\tau)} d\tau \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \sigma_{yy}(t) &= \frac{E_c(t)}{1-\nu^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \left(\frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2} \right) \pi^2 \left[1 - \frac{\gamma \varphi(\tau) E_c(\tau) \{m^4 \mu_x(\tau) + n^4 \mu_y(\tau) a^4/b^4 + m^2 n^2 \{\mu_x(\tau) + \mu_y(\tau)\} a^2/b^2\}}{m^4 \{1 + \mu_x(\tau)\} + n^4 \{1 + \mu_y(\tau)\} a^4/b^4 + m^2 n^2 \{2 + \{\mu_x(\tau) + \mu_y(\tau)\}/(1 + \nu)\} a^2/b^2} \int_0^t e^{-Q(\tau)} d\tau \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \sigma_{xz}(t) &= E_s \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left[1 + \frac{\gamma \varphi(\tau) E_c(\tau) (m^2 + n^2 a^2/b^2)^2}{m^4 \{1 + \mu_x(\tau)\} + n^4 \{1 + \mu_y(\tau)\} a^4/b^4 + m^2 n^2 \{2 + \{\mu_x(\tau) + \mu_y(\tau)\}/(1 + \nu)\} a^2/b^2} \int_0^t e^{-Q(\tau)} d\tau \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \sigma_{yz}(t) &= E_s \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \left[1 + \frac{\gamma \varphi(\tau) E_c(\tau) (m^2 + n^2 a^2/b^2)^2}{m^4 \{1 + \mu_x(\tau)\} + n^4 \{1 + \mu_y(\tau)\} a^4/b^4 + m^2 n^2 \{2 + \{\mu_x(\tau) + \mu_y(\tau)\}/(1 + \nu)\} a^2/b^2} \int_0^t e^{-Q(\tau)} d\tau \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

5. 計算例

鉄筋比 $A_{sx}/A_{cx} = A_{sy}/A_{cy} = 0.005$, 辺長比 $a/b = 1$ の周辺単純支持鉄筋正方形スラブを考える。材令によるコンクリートの弾性係数の変化は無視し、 $E_c = 2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.15$, $E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu_s = 0.3$, また式(3)の creep function ϕ 決定する任意定数は $\gamma = 0.026$, $A_1 = 4.82 \times 10^{-5}$, $C_0 = 0.9 \times 10^{-5}$ とする。材令 $t_1 = 28$ 日で荷重するものとし、式(21)より算定した時間 t の経過に伴う鉄筋およびコンクリートの応力 $\sigma_c(t)$ および $\sigma_s(t)$ の変化の様態を図-2に示した。



6 結語

本研究は文献(5)の鉄筋コンクリートばりに対する単軸曲げクリープ理論を2次元クリープ問題に拡張応用し、鉄筋コンクリート矩形スラブの曲げクリープ解析に適用したものである。本論文では、式(13)の方程式に対し、式(17)のごとき Navier 型の解が容易にえられる周辺単純支持スラブしか取り扱わなかったが、式(13)は鉄筋コンクリートの曲げクリープ解析の基本方程式として任意の境界条件をもつスラブに適用可能なものであり、これらの解析結果についても逐次報告の予定である。

【参考文献】

- (1) Fr. Dischinger: Elastische und Plastische Verformung der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken. Bauing. 20, 1939.
- (2) 岡田 清: 鉄筋コンクリート梁のクリープ応力近似解. 土木学会誌 36巻5号, 昭和26年5月.
- (3) N. Kh. Arutyunyan: Some Problems in the Theory of Creep in Concrete Structures. Pergamon Press. 1966.
- (4) 坂 静雄 六車 照: コンクリートの2次元クリープに関する理論的研究. 日本建築学会論文報告集 第68号, 昭和36年6月.
- (5) 山崎・寿坂・羽根: 複鉄筋コンクリートばりの曲げクリープ解析. 昭和42年度土木学会西部支部研究発表会論文集 昭和43年2月.