

九州大学 正会員 山崎 徳世
" " 〇 櫻 木 武

1 緒言 連続はりおよびラーメンの自由振動解析には、微分方程式の直接解に基づく方法と振動角法との2法が最も広く利用され、数式内取扱いも簡明であるが、これら幾種解法はいずれも板はりとして構成される一体構造の振動解析に適用することか不可能である。本研究は直交関数展開式を用いて連続はりおよびラーメンの曲げの自由振動問題の解法を提示するとともに、板はり一体構造の振動解析における基礎理論に資せんとするものである。

2 直交関数展開公式 本研究で使用する直交関数ははりの曲げの自由振動の微分方程式に

由来する特性関数であり、表-1に示すごとき種類があるが、これらはいずれも直交条件の他に式(1)を満足する。

$$d^4 \zeta_n(\xi) / d\xi^4 = \delta_n^4 \zeta_n(\xi) \quad (1)$$

また、 $\zeta_n(\xi)$ によりさらに定義された任意関数 $f(\xi)$ の展開公式は次のごとくである。

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta_n(\xi) \quad (2)$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\delta_n^4} \int_0^1 f(\xi) \zeta_n(\xi) d\xi$$

(δ_n^4 は特性方程式(1)の固有値であり、Case(1)では $T_n^2 = 1/2$ 、Case(7)では $T_n^2 = 1$ であり、他のCaseは表-1に示すとおりである)

3 解法 (1) 基礎関数 図-1(a)に示すラーメンにおいて、直列に剛結した一連のはりに構成される部材列ABは、両端A, Bの他に中間に m 本の柱 ($i=1, 2, \dots, m$) にて支持されている。ラーメンが振動すれば、各中間支柱に垂直反力 R_i および反力モーメント M_i が生ずるが(図-1(b)参照)、これらはいずれも部材列ABの振動変位を拘束する一種の弾制力とみなすことができ、一般に中間支柱の座標値 ξ と時間 t の関数で与えられるゆえ、 $p(x, t)$ と書き表わせば、本題の部材列ABの自由振動の微分方程式ははりの強制振動の微分方程式と同じ形式で与えられることとなる。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (3)$$

ここに、EI: 部材列ABの曲げ剛性、 ρ : 部材列ABの単位長さ当たりの質量、 y : 部材列ABのたわみ

式(1)の一般解はその斉次方程式から与えられる全関数 y_1 と特殊解 y_2 との和で与えられるが、全関数は周知のごとく次式で表わされる。

$$y_1 = (A \cosh \lambda \xi + B \sinh \lambda \xi + C \cos \lambda \xi + D \sin \lambda \xi) \sin(\omega t + \epsilon) \quad (4)$$

ここに、 $\lambda = l \sqrt{\rho \omega^2 / EI}$ 、 $\xi = x/l$ 、 ω : 固有円振動数、 ϵ : 初期位相角、 A, B, C, D : 積分定数

Case	特性方程式	特性関数(連続はり)
(1)	$\Delta \Delta \Delta \Delta \delta = 0$	$\zeta_n(\xi) = \sin n\pi \xi$
(2)	$\cosh \delta \cosh \delta + 1 = 0$	$\zeta_n(\xi) = T_n (\cosh \delta \xi - \cosh \delta \delta \xi) - \delta T_n (\sinh \delta \xi - \sinh \delta \delta \xi)$ $\delta T_n = 1 / (\cosh \delta \delta + \cosh \delta \delta)$, $\delta T_n = 1 / (\sinh \delta \delta + \sinh \delta \delta)$
(3)	$\cosh \delta \cosh \delta + 1 = 0$	$\zeta_n(\xi) = T_n (\cosh \delta \xi + \cosh \delta \delta \xi) - \delta T_n (\sinh \delta \xi + \sinh \delta \delta \xi)$ $\delta T_n = 1 / (\cosh \delta \delta + \cosh \delta \delta)$, $\delta T_n = 1 / (\sinh \delta \delta + \sinh \delta \delta)$
(4)	$\cosh \delta \cosh \delta - 1 = 0$	$\zeta_n(\xi) = T_n (\cosh \delta \xi - \cosh \delta \delta \xi) - \delta T_n (\sinh \delta \xi - \sinh \delta \delta \xi)$ $\delta T_n = 1 / (\cosh \delta \delta - \cosh \delta \delta)$, $\delta T_n = 1 / (\sinh \delta \delta - \sinh \delta \delta)$
(5)	$\cosh \delta \cosh \delta - 1 = 0$	$\zeta_n(\xi) = T_n (\cosh \delta \xi + \cosh \delta \delta \xi) - \delta T_n (\sinh \delta \xi + \sinh \delta \delta \xi)$ $\delta T_n = 1 / (\cosh \delta \delta - \cosh \delta \delta)$, $\delta T_n = 1 / (\sinh \delta \delta - \sinh \delta \delta)$
(6)	$\tanh \delta = \tan \delta$	$\zeta_n(\xi) = T_n (\cosh \delta \xi - \cosh \delta \delta \xi) - \delta T_n (\sinh \delta \xi - \sinh \delta \delta \xi)$ $\delta T_n = 1 / (\cosh \delta \delta - \cosh \delta \delta)$, $\delta T_n = 1 / (\sinh \delta \delta - \sinh \delta \delta)$
(7)	$\tanh \delta = \tan \delta$	$\zeta_n(\xi) = T_n (\sinh \delta \xi - \sinh \delta \delta \xi)$ $\delta T_n = 1 / \sinh \delta \delta$, $\delta T_n = 1 / \sinh \delta \delta$

(註) δ_n は特性方程式(1)の固有値である。

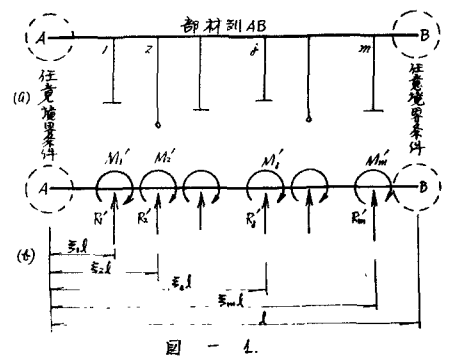


図-1

特殊解 y_p は次のごとく求められる。中間支柱の垂直反力 R_j および反力モーメント M_j は、それぞれとも同じ瞬間的な関数であり次式のごとく表わされる。

$$R_j' = R_j \sin(\omega t + \varepsilon), \quad M_j' = M_j \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (\text{ここに, } R_j: \text{最大反力, } M_j: \text{最大反力モーメント}) \quad (5)$$

式(5)の R_j' および M_j' を式(2)の展開式を用いた三角関数表(3)にて展開すれば次式が得られる。

$$\{R_j'\} = \frac{R_j}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} Z_n(\xi) Z_n(\xi) \sin(\omega t + \varepsilon), \quad \{M_j'\} = -\frac{M_j}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} Z_n'(\xi) Z_n(\xi) \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (6)$$

ここに $\{ \}$ は $Z_n(\xi)$ による展開式を意味し、[FL] の次である。

よって、式(6)の総和を求めれば、部材列 AB に作用する全強制力 $\phi(x, t)$ が与えられ、次式のごとく算定される。

$$\phi(x, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{R_j}{2} Z_n(\xi) - \frac{M_j}{2} Z_n'(\xi) \right\} Z_n(\xi) \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (7)$$

他方、式(7)の函数形より判断して、特殊解 y_p を三角関数展開式で表わし、次式のごとく仮定する。

$$y_p = \sum_{n=1}^{\infty} G_n Z_n(\xi) \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (\text{ここに, } G_n: \text{任意定数}) \quad (8)$$

式(7)および式(8)を式(3)に代入し、かつ $Z_n(\xi)$ に関する式(1)の関係式を考慮すれば、式(8)の任意定数 G_n が次式のごとくえられる。

$$G_n = -\frac{1}{EI} \sum_{j=1}^m \frac{R_j Z_n(\xi_j) - (M_j/2) Z_n'(\xi_j)}{T_n^4 (T_n^4 - \lambda^4)} \quad (9)$$

式(9)を式(8)に代入すれば特殊解 y_p が求まり、さらに式(4)の全関数 y と加え合せて式(3)の一般解 y が得られ、部材列 AB の標準関数 Y が次のごとく算定されることとなる。

$$Y = A \cosh \lambda \xi + B \sinh \lambda \xi + C \cos \lambda \xi + D \sin \lambda \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_j Z_n(\xi_j) + M_j Z_n'(\xi_j)}{T_n^4 (T_n^4 - \lambda^4)} Z_n(\xi) \quad (10)$$

$$\text{ここに, } R_j = -\frac{P}{EI} R_j, \quad M_j = \frac{P}{EI} M_j$$

以上の前論では、境界条件にて $A \sim D$ を決定する際に、部材列 AB の両端に働く端モーメント (M_0, M_{m+1}) を考慮するものとして取り扱ったが、文献(1)に示すごとく、中間支柱の垂直反力および反力モーメントと同じく部材列 AB に作用する荷重とみなして処理することも可能であり、かつこの場合には標準関数 Y が次式のごとく与えられる。

$$Y = A \cosh \lambda \xi + B \sinh \lambda \xi + C \cos \lambda \xi + D \sin \lambda \xi + \sum_{n=1}^m \frac{R_j Z_n(\xi_j)}{T_n^4 (T_n^4 - \lambda^4)} + \sum_{n=1}^{m+1} \frac{M_j Z_n'(\xi_j)}{T_n^4 (T_n^4 - \lambda^4)} Z_n(\xi) \quad (10')$$

また、式(10)および式(10')において、 M_j の項を除去する。部材列の中間に垂直反力のみが生ずることと構造するのら連続梁の標準関数をうる。

(2) 振動数方程式 式(10)に含まれる未知数 A, B, C, D, R_j, M_j および λ は、部材列 AB の境界条件および中間支柱位置における部材列 AB の柱との連続条件から求まる。端部の境界条件は図 1 のごとくとせ、固定、自由および柱の 4 種類あり、これらが直ちに組合せられたそれぞれの Case について結局 8 つの境界条件式はうるが、その全 2 列挙することは断面の都合上不可能であるので、本文では最も多様性のある次のことと境界条件を例にとりて以下論ずることとする。

$$\xi=0: \quad Y=d_0, \quad d^2 Y/d\xi^2 = -M_0, \quad \xi=1: \quad Y=d_{m+1}, \quad d^2 Y/d\xi^2 = M_{m+1} \quad (11)$$

両端の垂直変位が作用垂直反力に比例するものと、その比例定数を γ とすれば、 d_0, d_{m+1} は次式のごとく表わされる。

$$d_0 = -\frac{EI}{P} \gamma_0 R_0, \quad d_{m+1} = -\frac{EI}{P} \gamma_{m+1} R_{m+1} \quad (12)$$

慣性力を求める部材列 AB に作用する力およびモーメントの釣合条件より、両端 AB の垂直反力 R_0, R_{m+1} を算出する式(12)に代入してえられる結果と式(10)と式(11)に代入すれば次のごとき連立方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} (W_0)_{d_0} \\ (H_0)_{d_0} \\ (G_0)_{d_0} \\ (D_0)_{d_0} \end{Bmatrix} \cdot X = 0 \quad (13)$$

ここに $X = [A, B, C, D, R_0, R_j, R_{m+1}, M_0, M_j, M_{m+1}, \Delta]^T$, Δ : 部材列 AB の水平変位

$$\begin{aligned} \langle W_0 \rangle_{4m} &= \begin{bmatrix} 1 - Y_0 \lambda^2 \cosh \lambda - 1 & -Y_0 \lambda^2 (\cosh \lambda - 1) & 1 - Y_0 \lambda^2 (1 - \cosh \lambda) & -Y_0 \lambda^2 (1 - \cosh \lambda) \\ \cosh \lambda - Y_{m+1} \lambda^2 (\cosh \lambda - 1) & \sinh \lambda - Y_{m+1} \lambda^2 (\cosh \lambda - 1) & \cosh \lambda - Y_{m+1} \lambda^2 (\cosh \lambda - 1) & \sinh \lambda - Y_{m+1} \lambda^2 (\cosh \lambda - 1) \\ \lambda^2 & 0 & -\lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 \cosh \lambda & \lambda^2 \sinh \lambda & -\lambda^2 \cosh \lambda & -\lambda^2 \sinh \lambda \end{bmatrix} \\ \langle H_0 \rangle_{4m} &= \begin{bmatrix} H_{01} - Y_0 (\lambda^2 Q_1 + \bar{E}_1) & H_{02} - Y_0 (\lambda^2 Q_2 + \bar{E}_2) & \cdots & H_{0j} - Y_0 (\lambda^2 Q_j + \bar{E}_j) & \cdots & H_{0m} - Y_0 (\lambda^2 Q_m + \bar{E}_m) \\ H_{(m+1)1} - Y_{m+1} (\lambda^2 \bar{Q}_1 + \bar{E}_1) & H_{(m+1)2} - Y_{m+1} (\lambda^2 \bar{Q}_2 + \bar{E}_2) & \cdots & H_{(m+1)j} - Y_{m+1} (\lambda^2 \bar{Q}_j + \bar{E}_j) & \cdots & H_{(m+1)m} - Y_{m+1} (\lambda^2 \bar{Q}_m + \bar{E}_m) \\ \mu_{01} & \mu_{02} & \cdots & \mu_{0j} & \cdots & \mu_{0m} \\ \mu_{(m+1)1} & \mu_{(m+1)2} & \cdots & \mu_{(m+1)j} & \cdots & \mu_{(m+1)m} \end{bmatrix} \\ \langle \bar{G}_0 \rangle_{4(m+2)} &= \begin{bmatrix} Y_0 & \bar{G}_{01} - Y_0 (\lambda^2 Q_1 - 1) & \bar{G}_{02} - Y_0 (\lambda^2 Q_2 - 1) & \cdots & \bar{G}_{0j} - Y_0 (\lambda^2 Q_j - 1) & \cdots & \bar{G}_{0m} - Y_0 (\lambda^2 Q_m - 1) & Y_0 \\ -Y_{m+1} & \bar{G}_{(m+1)1} - Y_{m+1} (\lambda^2 \bar{Q}_1 - 1) & \bar{G}_{(m+1)2} - Y_{m+1} (\lambda^2 \bar{Q}_2 - 1) & \cdots & \bar{G}_{(m+1)j} - Y_{m+1} (\lambda^2 \bar{Q}_j - 1) & \cdots & \bar{G}_{(m+1)m} - Y_{m+1} (\lambda^2 \bar{Q}_m - 1) & -Y_{m+1} \\ 1 & T_{01} & T_{02} & \cdots & T_{0j} & \cdots & T_{0m} & 0 \\ 0 & T_{(m+1)1} & T_{(m+1)2} & \cdots & T_{(m+1)j} & \cdots & T_{(m+1)m} & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$H_j, \bar{G}_j, \mu_j, T_j$: 11 式に $\bar{E}_j, \bar{E}_j$ を λ の関数, $Q_j, \bar{Q}_j$ と $\bar{E}_j$ に $\bar{E}_j, \lambda$ の関数, $Y_j = EI K_j / l_j^3$

中間支柱位置における連続条件は次のとおりである。すなわち、中間支柱 j の位置における部材端 AB のたわみ $\bar{E}_j$ とたわみ角が中間支柱 j の垂直変位 α_j 及び柱頭回転角 θ_j に等しくなければならない。以下に式(14)を以て示す。

$$Y(\bar{E}_j) = \alpha_j = Y_j \bar{E}_j, \quad \frac{dY}{d\bar{E}_j}(\bar{E}_j) = \theta_j \quad (\alpha_j: j=1, 2, \dots, m) \quad (14)$$

他方、柱の柱頭回転角 θ_j と柱頭端モーメント M_j との関係は既述の振動接点式²⁾を用いて次のごとく表わされる。

$$\theta_j = -\bar{E}_j M_j - \Omega_j \Delta, \quad \text{よって, } \mu_j = \frac{EI l_j}{E_j \bar{E}_j}, \quad \bar{E}_j = l_j / \mu_j \quad (15)$$

	柱下端固定の場合	柱下端 Hinge の場合
$\bar{E}_j$	$\bar{E}_j / \alpha_j \beta_j$	$-\bar{E}_j / \alpha_j \beta_j$
Ω_j	$\mu_j \alpha_j / \bar{E}_j$	$\lambda_j (\beta_j^2 - \alpha_j \bar{E}_j) / \bar{E}_j \bar{E}_j$

l_j, E_j, I_j, μ_j : 柱 j の部材長、弾性係数、断面二次モーメント及び単位長当りの質量

$\alpha_j, \beta_j, \bar{E}_j, \bar{E}_j$: 11 式に λ_j の関数である。 $\lambda_j = l_j \sqrt{E_j \omega^2 / E_j}$

式(14)および式(15)を式(10)に代入すれば式(16)がえられる。

$$\begin{bmatrix} \langle W_0 \rangle_{4m} & \langle H_0 \rangle_{4m} & \langle \bar{G}_0 \rangle_{4(m+2)} & (0)_m \end{bmatrix} \cdot X = 0, \quad \text{よって } (0)_m = \{0, 0, 0, 0\}^T \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \langle W_0 \rangle_{4(m+2)} & \langle H_0 \rangle_{4(m+2)} & \langle \bar{G}_0 \rangle_{4(m+2)} & (\Omega_0)_{m+2} \end{bmatrix} \cdot X = 0, \quad (\Omega_0)_{m+2} = \{\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m, \Omega_{m+1}\}^T$$

$\langle W_0 \rangle_{4m}$ および $\langle H_0 \rangle_{4(m+2)}$ の行列要素は $\bar{E}_j$ および λ の関数であり、 $\langle \bar{G}_0 \rangle_{4(m+2)}$ 、 $(1-Y_j)_{4(m+2)m}$ および $\langle \bar{G}_0 \rangle_{4(m+2)(m+2)}$

の行列要素は $\bar{E}_j, \bar{E}_j, \lambda$ ($\langle \bar{G}_0 \rangle_{4(m+2)(m+2)}$ の行列要素には $\bar{E}_j$ が含まれる) の関数である。

さらに、節点移動のあるラメーンは平衡方程式が成立する。柱頭部 j の水平せん断力と柱両端のたわみ角および部材回転角との和が 0 関係式²⁾より、柱 j の柱頭部 j の水平せん断力 Q_{0j} と端モーメント M_j との関係が次のごとく求められる。

$$Q_{0j} = -\frac{EI}{l_j^3} (\lambda_j M_j + \pi_j \Delta), \quad \text{よって, } \quad (17)$$

	柱下端固定の場合	柱下端 Hinge の場合
λ_j	$-\frac{\bar{E}_j}{E_j \alpha_j}$	$-\frac{\lambda_j (\alpha_j \bar{E}_j - \beta_j \bar{E}_j)}{E_j \alpha_j \bar{E}_j}$
π_j	$\frac{\lambda_j}{E_j \mu_j \alpha_j} (\bar{E}_j^2 - \lambda_j^2 \alpha_j \bar{E}_j)$	$\frac{\lambda_j}{E_j \mu_j \alpha_j} \{ \frac{\lambda_j}{2 E_j} (\alpha_j \bar{E}_j - \beta_j \bar{E}_j)^2 + \bar{E}_j^2 - \alpha_j \bar{E}_j \lambda_j^2 \}$

式(17)に部材端 AB における水平力の釣合式 ($\sum_{j=0}^m Q_{0j} = 0$) に代入すれば、本題のラメーンに關する次のごとく平衡方程式がえられる。

$$\begin{bmatrix} \{0\}_4 & \{0\}_m & \{ \lambda_j \}_{m+2} & \sum_{j=0}^m \pi_j \end{bmatrix} \cdot X = 0 \quad (18)$$

よって、 $\{0\}_4 = (0, 0, 0, 0)$, $\{0\}_m = (0, 0, \dots, 0, 0)$

$\{ \lambda_j \}_{m+2} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1})$

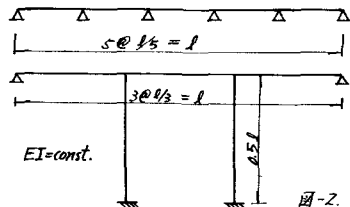
以上、式(13)、(16)および式(18)を連立させれば、未知数 $A, B, C, D, R_1 \sim R_m, M_0 \sim M_{m+1}$ および Δ

を求めたものの基本連立方程式をうるが、定数項はいずれも0である。したがって、解が存在するものに17連立方程式の係数行列式が0となければならぬことより、図-1(a)のラーメンに關する振動方程式が次のごとく導き出されることとなる。

$$\begin{vmatrix} \langle \overline{W}_0 \rangle_{44} & \langle H_0 \rangle_{4m} & \langle G_0 \rangle_{4(m+2)} & (0)_4 \\ \langle \overline{W}_0 \rangle_{m4} & \langle H_0 \rangle_{mm} & \langle G_0 \rangle_{m(m+2)} & (0)_m \\ \langle \overline{W}_0 \rangle_{(m+2)4} & \langle H_0 \rangle_{(m+2)m} & \langle G_0 \rangle_{(m+2)(m+2)} & (0)_{m+2} \\ \{0\}_4 & \{0\}_m & \{A_0\}_{m+2} & \sum_{i=1}^m \pi_i \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

当座から、式(9)の四行目において Δ の項および右方程式に由来する項すなわち最後の行と列とを除去すれば、節点移動のないラーメンの振動方程式がえられ、さらに、 $M_1 \sim M_m$ の項および式(6)の第2式に由来する項を除去すれば連続梁のみの振動方程式がえられる。

4 計算例 図-2に示すスパン連続梁および3スパンラーメンの固有値を求めれば表-2のごとくえられる。また、連続梁のモードを描けば図-3のとおりである。



5 結論 本論文で式(10)の標準関数 Y を用いて式(9)の振動方程式を求めたが、式(10)によつて計算可能であり、か

ゝる場合には端モーメント M_0, M_{m+1} を任意とみなすゆゑ、境界条件式における M_0, M_{m+1} が消失する。直交関数 $Z_n(\xi)$ は表-1に示す Y を用いてはじき、特に $Z_n(\xi)$ の導定時における Y の境界条件と部材列ABの境界条件とが一致する場合には、式(9)の四行目における $\langle H_0 \rangle_{4m}$ および $\langle G_0 \rangle_{4(m+2)}$ の行列要素がいずれも0となり、計算が著しく簡略化される。

本研究は連続梁および3スパンラーメンの自由振動問題の解法を提示したものであるが、3スパンラーメンについても拡張応用が可能である。また、1には述べたごとく、本法は板梁連続梁やラーメンに2弾性支持を設けるごとく板-はり一体構造の振動解析における基礎理論となりうる点、および無梁板梁の手掛りとなりうる点と他の幾何法に類をなす特色をもちといえる。

(参考文献)

- 1) 山崎 博志 フーリエ級数による連続梁およびラーメンの解法、九州理工集報 第39巻第3号 昭和41年10月
- 2) 小野 章、振動解析法とその実用化、建築学会大会論文集 昭和42年3月

表-2 固有値入

n	5スパン連続梁	3スパンラーメン
1	15.7080	4.3775
2	16.5454	7.3946
3	18.5022	7.5140
4	20.7655	10.4709
5	22.7537	10.5854

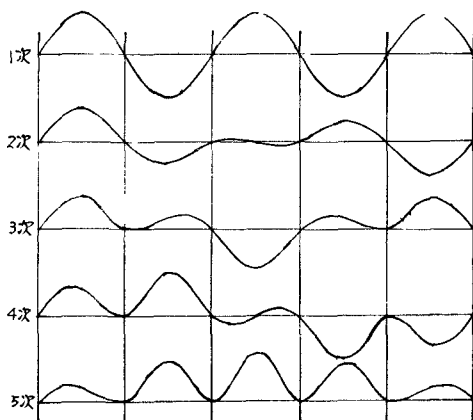


図-3 Modes.