

九州大学 正員 山時 徳也

" " 〇太田 俊昭

1. 序言

先に著者は、漸増固定点荷重を受ける連続はりおよびラーメンなどに対する弾塑性解法¹⁾を提示し、弾塑性時における非線形挙動の追跡結果などを併せ報告したか、周知のことく橋構造の解析に当っては、移動荷重に対する考察が特に必要であり、この見地から福本代²⁾らは Mohr の定理を用いてくり返し移動荷重を受ける一端固定他端単純支持ばりの弾塑性挙動を解析し、崩壊荷重の約96%の荷重で変形硬化現象を生じ、たわみの安定現象が現れることを述べている。

本研究は、前述の著者らの研究を補正エネルギー式にモーメントと曲率のヒステリシスの関係を導入することにより、移動荷重を受けるラーメンの弾塑性解析に拡張応用したものである。

2 補正エネルギー

一般に、弾性限界を越えたりくり返し荷重に対するモーメント M と曲率 ϕ のヒステリシスは、図-1 に示すごとき直線と曲線とで構成される軌跡と与えられる。よかるに、この曲線部が問題の複雑化の主要因を形成するゆえ、ここではこれを図-2 のごとき近似直線 (M - ϕ 近似直線と称す) AB および CD で置き換え、補正エネルギーの式表現の簡易化を試みるものとする。すなわち、これらの直線に対する単位長さ当りの補正エネルギー $dU/ds = \int \phi dM$ の実用式を誘導のうえ整理すればそれぞれ以下に示す通りである (図-2 参照)。

Case 1 (AB部);

$$M-\phi \text{ 近似直線: } M-M_{ya}=EI(\phi-\phi_{ya})/\kappa, (M_{ya} \leq M < M_{pa}) \text{ --- (1)}$$

$$\text{単位長さ当りの補正エネルギー: } dU/ds = \kappa(M-M_{ya}+EI\phi_{ya}/\kappa)^2/2EI + C_1 \text{ --- (2)}$$

ここに EI : 曲げ剛性, κ M - ϕ 近似直線の勾配を規定する定数

て詳しくは文献(3)を参照のこと, M_{ya}, ϕ_{ya} : A点のモーメントおよび曲率,

ds : 材軸方向の微小長さ, $M_{pa} = M_{ya} + (f-1)M_y$, $f = M_p/M_y$,

M_p, M_y : 完全塑性モーメントおよび降伏モーメント。

Case 2 (BC部);

$$M-\phi \text{ 直線: } M-M_b = EI(\phi-\phi_b), (M_{yb} < M \leq M_b) \text{ --- (3)}$$

$$\text{単位長さ当りの補正エネルギー: } dU/ds = (M-M_b+EI\phi_b)^2/2EI + C_2 \text{ --- (4)}$$

ここに M_b, ϕ_b : B点のモーメントおよび曲率, $M_{yb} = M_b - 2M_y$

Case 3 (CD部);

$$M-\phi \text{ 近似直線: } M-M_{yb} = EI(\phi-\phi_{yb})/\kappa, (M_{pb} < M \leq M_{yb}) \text{ --- (5)}$$

$$\text{単位長さ当りの補正エネルギー: } dU/ds = \kappa(M-M_{yb}+EI\phi_{yb}/\kappa)^2/2EI + C_3 \text{ --- (6)}$$

ここに M_{yb}, ϕ_{yb} : C点のモーメントおよび曲率, $M_{pb} = M_{yb} - (f-1)M_y$

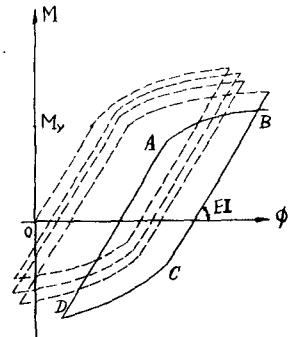


図-1

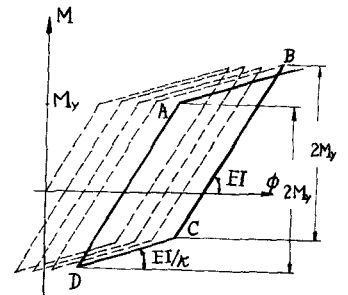


図-2

Case 4 (DA部) ;

$$M-\phi \text{直線} : M-M_a = EI(\phi - \phi_b), (M_a \leq M < M_{ya}) \quad \text{----- (7)}$$

$$\text{単位長当りの補正エネルギー: } dU/ds = (M-M_a + EI\phi_a)^2 / 2EI + C_4 \quad \text{----- (8)}$$

ここに M_a, ϕ_a : D点のモーメントおよび曲率, $M_{ya} = M_a + 2M_y$

ただし C_1, C_2, C_3, C_4 : 履歴過程ならびに断面形状によって定まる定数。

以上の考察より、補正エネルギー式はヒステリシスの各段階を通じて次式で一般表示されることがわかる。すなわち、 $U = \int_{1/2EI}^{\kappa} (M - \bar{M})^2 + C_4 \} ds \quad \text{----- (9)}$

ただし、実際計算に必要な定数 $\bar{M}$ は、表-1に示す内容となる、 C_1, C_2, C_3, C_4 を一般表示のものとする。

なおここで問題となるヒステリシスの各段階の判別操作をプログラム表示すれば表-2の内容となり、またそのFlow-Chartは図-3に示すことになる。

また式(9)に変分原理を適用すれば、変位 S_i および切線角 τ_i がそれぞれ下記のごとく導かれる。

$$S_i = \partial U / \partial R_i = \int \{ \kappa (M - \bar{M}) (\partial M / \partial R_i) / EI \} ds \quad \text{----- (10)}$$

$$\tau_i = \partial U / \partial M_i = \int \{ \kappa (M - \bar{M}) (\partial M / \partial M_i) / EI \} ds \quad \text{----- (11)}$$

ただし R_i : 変位 S_i の方向に作用する仮想力, M_i : 回転角の軸に作用する仮想モーメント。

	κ	$\bar{M}$
Case 1	κ	$M_{ya} - EI\phi_a / \kappa$
Case 2	1	$M_b - EI\phi_b$
Case 3	κ	$M_{yb} - EI\phi_b / \kappa$
Case 4	1	$M_a - EI\phi_a$
$\phi_a = \phi_a + (M_{ya} - M_a) / EI, \phi_b = \phi_b + \kappa (M_a - M_{yb}) / EI$ $\phi_a = \phi_a + (M_{yb} - M_b) / EI, \phi_b = \phi_b + \kappa (M_b - M_a) / EI$		

表 — 1

No 1	if $M \geq M_{ya} \wedge \Delta M \geq 0$ then $M_b = M$, Case 1 else No 2
No 2	if $M_{yb} < M \leq M_b$ then Case 2 else No 3
No 3	if $M > M_b$ then No 1 if $M \leq M_{yb} \wedge \Delta M \leq 0$ then $M_a = M$, Case 3 else No 4
No 4	if $M_a \leq M < M_{ya}$ then Case 4 else No 5
No 5	if $M < M_a$ then No 3 if $M > M_{ya}$ then No 1

表 — 2 ただし ΔM はモーメントの変化量。

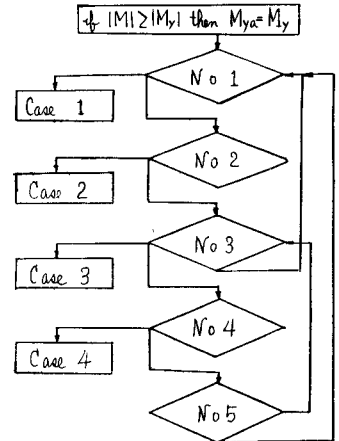


図 — 3

3. くり返し荷重に対する弾塑性たわみ角式

弾性限界を越えたくり返し荷重を受ける直線部材ABの弾塑性たわみ角式を誘導すれば次の通りである(図-4参照)。

すなわち、材端AおよびBに働く端モーメントをそれぞれ M_{AB} および M_{BA} とすれば、任意点Sのモーメント M_s は次式で与えられる。

$$M_s = (1-S)M_{AB} + (-S)M_{BA} + M_0 \quad \text{----- (12)}$$

ただし M_0 : 中点荷重によるS点のモーメント, $S = x/l$

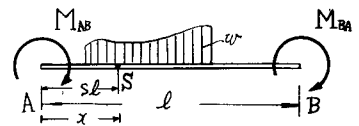


図 — 4

式(12)に式(10)を代入して材端Aの切線角 τ_A を求めれば

$$\tau_A = \partial U / \partial M_{AB} = \frac{l}{EI} \int \kappa (M_s - \bar{M}) (1-S) ds = \frac{l}{EI} \left[\int \kappa \{ (1-S)^2 M_{AB} + (-S)(1-S) M_{BA} - (1-S) \bar{M} \} ds \right] - \frac{l}{EI} [a_A M_{AB} - b_A M_{BA} + C_A |M_y| + D_A] \quad \text{----- (13)}$$

同様に τ_B が次式でえられる。

$$\tau_B = \frac{1}{EI} [-b_B M_{AB} + a_B M_{BA} + C_B |M_y| + D_B] \quad (14)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} a_A &= \int_A^B \kappa (1-s)^2 ds, & b_A &= b_B = - \int_A^B \kappa (-s)(1-s) ds, & C_A &= \int_A^B \kappa (1-s)(M/M_y) ds \\ a_B &= \int_A^B \kappa s^2 ds, & C_B &= - \int_A^B \kappa (-s)(M/M_y) ds \\ D_A &= \int_A^B \kappa M_0 (1-s) ds, & D_B &= \int_A^B \kappa M_0 (-s) ds \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(13), (14)を M_{AB} と M_{BA} について連立に解けば

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= EK \{ (a_B/\lambda) \tau_A + (b_A/\lambda) \tau_B - (a_B C_A + b_A C_B) |M_y|/\lambda - (a_B/\lambda) D_A - (b_A/\lambda) D_B \\ M_{BA} &= EK \{ (a_A/\lambda) \tau_A + (b_B/\lambda) \tau_B - (a_A C_B + b_B C_A) |M_y|/\lambda - (a_A/\lambda) D_B - (b_B/\lambda) D_B \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ただし $K=I/l$ 剛度, $\lambda=a_A a_B - b_A b_B$, l 部材長, I 断面2次モーメント。

ここで材端AおよびBの回転角をそれぞれ θ_A および θ_B とし、部材ABの部材回転角を R とすれば、切線角 τ_A , τ_B との間には次式が成立する。

$$\tau_A = \theta_A - R, \quad \tau_B = \theta_B - R \quad (17)$$

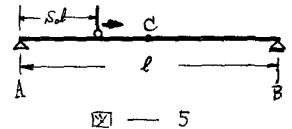
式(16)に式(17)を代入のうえ整理すれば、結局所毎の弾塑性たわみ角式が次のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= EK \{ \alpha_{AB} \theta_A + \beta_{AB} \theta_B - (\alpha_{AB} + \beta_{AB}) R \} + \delta_{AB} |M_y| + C_{AB} \\ M_{BA} &= EK \{ \alpha_{BA} \theta_B + \beta_{BA} \theta_A - (\alpha_{BA} + \beta_{BA}) R \} + \delta_{BA} |M_y| + C_{BA} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここに

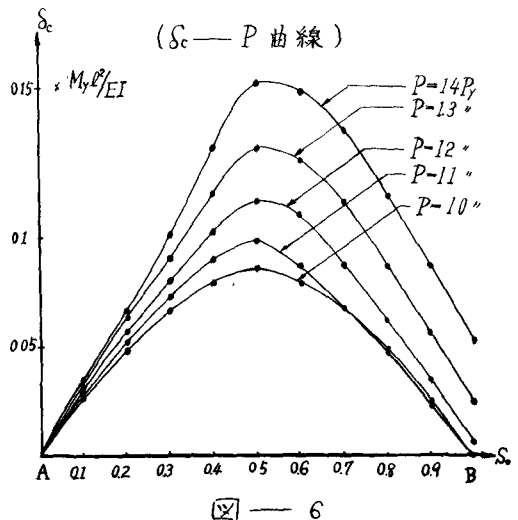
$$\left. \begin{aligned} \alpha_{AB} &= a_B/\lambda, & \alpha_{BA} &= a_A/\lambda, & \beta_{AB} &= \beta_{BA} = b_A/\lambda, \\ \delta_{AB} &= -(a_B C_A + b_A C_B)/\lambda, & \delta_{BA} &= -(a_A C_B + b_B C_A)/\lambda, \\ C_{AB} &= -(b_A D_A + a_B D_B)/\lambda, & C_{BA} &= -(b_B D_B + a_A D_A)/\lambda \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

特にくり返し荷重が弾性限界内であれば、式(18)に含まれる κ および M 値は部材全長にわたってそれぞれ1および0となり、したがって式(18)の諸係数は当然 周知の弾性たわみ角式の係数に合致することとなる。



4. 解法

一般に移動荷重は不規則なくり返し荷重であるゆえ、上記誘導のたわみ角式を用うればかかる荷重に対する不静定構造物の弾塑性移動荷重解析可能となる。すなわち、実際演算に当っては、節点の回転角および変位を未知数とし、節点方程式、せん断力の釣合式を用いて解く従来のたわみ角法に準すればよく、ただ部材の各点の未知量 κ および M 値に対しては、モーメントと曲率の履歴状態を図-3のプログラムを用いて判別する必要があり、またこれらの未知量を含む式(10), (11) および式(15)



の各値は Simpson 公式に基づく数値積分によって定められることになる。

なほ、塑性ヒンジ発生時には、同点においてたわみ角は不連続となる。このため新たな未知回転角および未知変位が誘発されるが、これらの未知数に対しては完全塑性条件式 $M = M_p$ とせん断力の釣合条件式を適用すればよい。また塑性ヒンジ形成後の曲率は、文献(2)より歪硬化発生時の曲率 $\phi_s = \epsilon_{st} \phi_y / \epsilon_y$ を採用するものとする。ただし ϵ_{st} , ϵ_y はそれぞれ歪硬化発生時のひすみおよび降伏ひすみである。

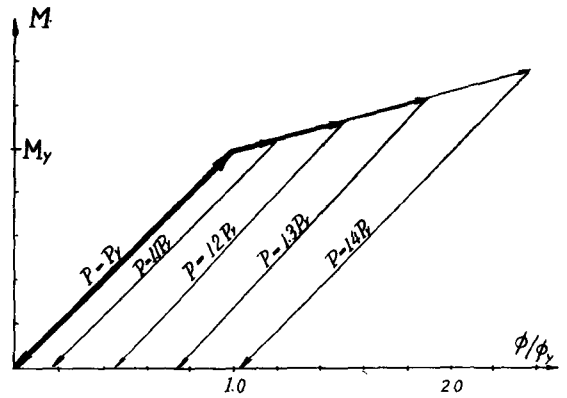


図 7

5. 計算例

図-5に示すごとき矩形断面の単純はりABに弾性限界を越えた移動荷重Pが作用するときの中央点Cのたわみ δ_c を追跡説明すれば以下の通りである。

すなわち、弾塑性時における κ および M 値は、文献(1)より $\kappa = 4.0$, $M = (1 - 1/4) M_y = 0.75 M_y$ となる。

次に式(10)は本例に対して下記のごとく書き表わされる。

$$\delta_c = \frac{1}{2EI} \left[\int_0^s \kappa (M_s - M) (s) ds + \int_s^1 \kappa (M_s - M) (1-s) ds \right]$$

ここに

$$M_s = P s l / 2, \quad (0 \leq s \leq s_0), \quad M_s = P l (1-s) / 2, \quad (s_0 \leq s \leq 1)$$

$$M_y l = P l^3 / 4$$

これらの関係諸式と図-3の判別プログラムを併用すれば

$P = P_y, 1.1P_y, 1.2P_y, 1.3P_y$ および $1.4P_y$ の移動荷重に対する δ_c が直ちに算定でき、図-6の結果をうる。なお図-7および図-8は、 $s = 0.4$ の中間モーメントの変化および $P = 1.4P_y$ の移動荷重に対する塑性領域の変化を示したものである。

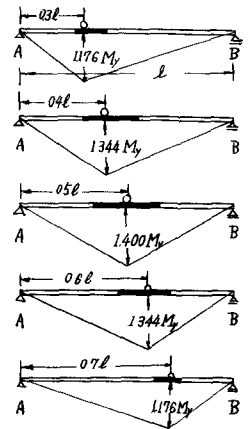


図 8

6. 結 び

本研究は補正エネルギー法によって弾性限界を越えたり戻し荷重を受ける直線部材の弾塑性たわみ角式を誘導し、もって移動荷重に対する連続はりやラーメンなどの弾塑性挙動の解明を図ったもので、本法によれば、単に単一移動荷重のみに限らず、複数個の不規則変動荷重も解析することかでき、さらにはくり返し荷重に対するたわみの安定性を吟味することにより、変形硬化荷重いわゆる *Shake-down load* を決定することも可能となる。これらについては後日発表の予定である。なお計算に当っては、九州大学の OKITAC 5090H 電子計算機を使用した。

(参考文献) (1) 山崎太田、弾塑性体の補正エネルギーについて、昭和38年度土木学会西部支部研究発表会講演、昭和39年2月

(2) 福本小坂、吉田、くり返し移動荷重による不静定はりの安定性に関する理論と実験、土木学会論文集、第144号、昭和42年8月

(3) B.G. Neal and P.S. Symonds, Cyclic Loading of Portal Frames, Theory and Tests, IABSE, Publications Vol 18, 1958