

九州大学

正 員 山崎忠也

〃

正 員 大田俊昭

〃

学生員 〇中村賢二

1. 序言

矩形板の極限解析については既に数多くの理論的、実験的研究が報告されているが、弾塑性解析に関しては論じたものは数少ない。本研究は矩形板の弾塑性時に おける応力の解明ならびに平均強度の算出を最終目的とし、その第1段階として3次元の塑性領域の広がりと考え、正方形板要素の *Stiffness Matrix* を誘導したうえで、いわゆる *Finite Element Method* を用いる片持矩形板の弾塑性解法を述べたものである。

2. 基本式の誘導

一般に平板が面外荷重を受けるとき、板内部に生ずる応力と曲率の関係式は、弾性域では周知の次式で与えられる。(図-1参照)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2Gz}{1-\nu} (\alpha_x + \nu\alpha_y) \\ \sigma_y &= \frac{2Gz}{1-\nu} (\nu\alpha_x + \alpha_y) \\ \tau_{xy} &= 2Gz (\alpha_{xy}) \end{aligned} \right\} \text{----- (1)}$$

ただし G : セン断弾性係数

ν : ポアソン比

$\alpha_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\alpha_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\alpha_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$: 曲率, w : たわみ

一方、弾塑性域では弾性の場合と同様に Navier の法則を仮定すれば、塑性理論により次のごとくされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Kz}{A} (\alpha_x + \nu\alpha_y) \\ \sigma_y &= \frac{Kz}{A} (\nu\alpha_x + \alpha_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{Kz}{A} (\alpha_{xy}) \end{aligned} \right\} \text{----- (2)}$$

$$\text{ただし } A = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_x\alpha_y + \alpha_y^2 + \alpha_{xy}^2} \text{----- (3)}$$

$K = \lambda \sin \beta$: β の値には無関係で、その符号のみを表わす。 $\lambda = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$, σ_p : 降伏応力

次にこれらの応力によって生ずるモーメントは、一般に次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= 2 \int_0^h \sigma_x z \, dz \\ M_y &= 2 \int_0^h \sigma_y z \, dz \\ M_{xy} &= 2 \int_0^h \tau_{xy} z \, dz \end{aligned} \right\} \text{----- (4)}$$

弾性域では式(4)に式(1)を代入して

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D (\alpha_x + \nu\alpha_y) \\ M_y &= D (\nu\alpha_x + \alpha_y) \\ M_{xy} &= D (1-\nu) \alpha_{xy} \end{aligned} \right\} \text{----- (5)}$$

ここに $D = \frac{4G}{1-\nu} \int_0^h z^2 \, dz = \frac{4Gh^3}{3(1-\nu)}$, 及び $2h$: 板の厚さ

これに対して弾塑性域では、材料の非圧縮性を仮定すれば($\nu = \frac{1}{2}$)、せん断ひずみ強度が $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$

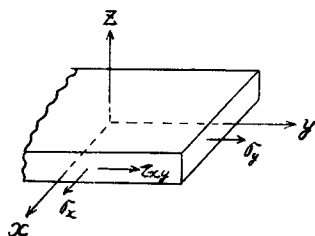


図-1

$+E_y^2 + E_{xy}^2 = 181A$ と表わされるゆえ、弾塑性境界 $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^0$ のせん断応力強度の連続条件式として次式が成立する。

$$S = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2) + \tau_{xy}^2} = 2G\bar{\epsilon} = 2G/21A = \bar{\epsilon} \quad \text{--- (6)}$$

したがってモーメントは式(4)に式(2)(3)および式(6)を代入のうえ整理すれば、結局次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= T(\alpha_x + \frac{1}{2}\alpha_y) \\ M_y &= T(\frac{1}{2}\alpha_x + \alpha_y) \\ M_{xy} &= \frac{T}{2}(\alpha_{xy}) \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (7)}$$

$$\text{ただし } T = 4G\bar{\epsilon}(l^2 - \frac{2}{3})$$

特に弾性限界および完全塑性時におけるモーメントと応力の関係式およびミーゼスの条件式 $\frac{1}{3}(\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2) + \tau_{xy}^2 = \bar{\epsilon}^2$ はそれぞれ下記に示す内容となる。

弾性限界時；

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{2}{3}\bar{\epsilon}^2 \alpha_x \\ M_y &= \frac{2}{3}\bar{\epsilon}^2 \alpha_y \\ M_{xy} &= \frac{2}{3}\bar{\epsilon}^2 \alpha_{xy} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (8)}$$

ミーゼス条件式：

$$M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2 = \frac{4}{3}M_p^2 \quad \text{--- (9)}$$

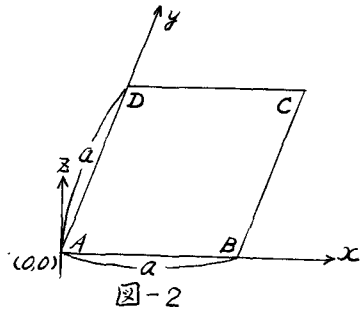
$$\text{ただし } M_p = \bar{\epsilon}_1 l^2$$

完全塑性時；

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \bar{\epsilon}^2 \alpha_x \\ M_y &= \bar{\epsilon}^2 \alpha_y \\ M_{xy} &= \bar{\epsilon}^2 \alpha_{xy} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (10)}$$

ミーゼス条件式：

$$M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2 = M_p^2 \quad \text{--- (11)}$$



3. 塑性領域を考慮した正方形板要素の Stiffness Matrix

前節2.で導いたモーメントと曲率の関係式を行列表示すれば次式をうる。

$$(M_x \ M_y \ M_{xy})^T = D_0 \lambda_n De(X) \quad \text{または } (M) = D_p(X) \quad \text{--- (12)}$$

$$\text{ここに } D_p = D_0 \lambda_n De, \ (X) = (\alpha_x \ \alpha_y \ 2\alpha_{xy})^T, \ (M) = (M_x \ M_y \ M_{xy})^T, \ D_0 = \frac{4G\bar{\epsilon}^3}{3(1-\nu)},$$

$$\lambda_n = \frac{3}{2}\bar{\epsilon}(1 - \frac{2}{3}) \quad \text{--- (13)}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{2}{3}, \ De = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{ただし肩字Tは転置行列を表す。}$$

いま、図-2のごとき辺長aの正方形板要素ABCDの任意点のなわみを $w = (1 \ \bar{x} \ \bar{y} \ \bar{x}^2 \ \bar{y}^2 \ \bar{x}\bar{y} \ \bar{x}^3 \ \bar{x}^2\bar{y} \ \bar{x}\bar{y}^2 \ \bar{y}^3 \ \bar{x}^3\bar{y} \ \bar{x}^2\bar{y}^2 \ \bar{x}\bar{y}^3 \ \bar{y}^4)$ (β) なる一般形で仮定すれば、式(12)を用いて Stiffness Matrix (K) が文献(2)と同形式の次式で求められる。ただし(β)は12行1列の列行列である。 $\bar{x} = \frac{x}{a}, \ \bar{y} = \frac{y}{a}$

$$(K) = (C)^T \left[\iint (B)^T D_p(B) dx dy \right] (C) = (C)^T (H) (C) \quad \text{--- (14)}$$

$$\text{ここに } (H) = \iint (B)^T D_p(B) dx dy \quad \text{--- (15)}$$

ただし (C): 頂点 A, B, C, D の座標値に関する 12 行 12 列の係数行列である。

(B): 変数 x, y に関する 3 行 12 列の行列である。

ここで 未知数 λ_n を含む式(15)を積分可能にするため、板要素 A B C D を図-3 に示すごとく $n \times n$ 等分し各分割正方形板の λ_n を一様と仮定すれば、式(15)は次のごとく書き改められる。

$$(H) = D_0 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left[\int_{\Omega_n} (B)^T D_0 (B) dx dy \right] = D_0 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n H_n \text{ --- (16)}$$

$$\text{ここに } H_n = \int_{\Omega_n} (B)^T D_0 (B) dx dy$$

ただし A_n : 第 n 番目の分割正方形板の面積

特に $n = 2$ なる場合、式(14)に式(16)の計算結果を

代入のうえ整理すれば、結局次式がえられる。

$$(K) = \frac{D_0}{a^2} \{ \lambda_1(K_1) + \lambda_2(K_2) + \lambda_3(K_3) + \lambda_4(K_4) \} \text{ --- (17)}$$

ここに K_1, K_2, K_3 および K_4 は 12 行 12 列の対称係数行列で次に示す内容となる。

$$K_1 = \begin{bmatrix} 5.4125 & & & & & & & & & & & \\ 1.9156 & 1.0698 & & & & & & & & & & \\ & 0.1948 & 0.0156 & -0.5219 & 0.2427 & 0.1094 & 0.3656 & 0.0917 & 0.0469 & 0.1969 & 0.0333 & -0.0156 \\ 1.9156 & -0.5156 & 1.0698 & & & & & & & & & \\ & 0.1635 & -0.6656 & 0.1094 & 0.2833 & 0.1031 & 0.0469 & 0.0917 & 0.0531 & -0.0156 & 0.0240 \\ -2.2250 & 0.2281 & -1.1344 & 2.0375 & & & & & & & & \\ & 5.4125 & -1.9156 & -1.9156 & -2.225 & -0.6656 & -0.5219 & -0.9625 & -0.0844 & -0.0844 \\ -0.5219 & 0.2427 & -0.1094 & -0.0406 & 0.1948 & & & & & & & \\ & 1.0698 & 0.5156 & 1.1344 & 0.2833 & 0.1094 & 0.5531 & 0.0917 & 0.0469 \\ 0.6656 & -0.1094 & 0.2833 & -0.5094 & -0.0156 & 0.1635 & & & & & & \\ & 1.0698 & 0.2281 & 0.1094 & 0.2427 & 0.5531 & 0.0469 & 0.0917 \\ -0.9625 & 0.5531 & -0.5531 & 0.0250 & 0.1969 & -0.0531 & 0.9125 & & & & & \\ & 2.0375 & 0.5094 & -0.0406 & 0.0250 & 0.0531 & -0.1031 \\ -0.0844 & 0.0917 & -0.0469 & -0.1031 & 0.0333 & 0.0156 & 0.1344 & 0.0385 & & & & \\ & 0.1635 & 0.0156 & 0.0531 & 0.0240 & -0.0156 \\ 0.0844 & -0.0469 & 0.0917 & -0.0531 & 0.0156 & 0.0240 & -0.1344 & -0.0156 & 0.0385 & & & \\ & 0.1948 & 0.1969 & -0.0156 & 0.0385 \\ -2.2250 & 1.1344 & -0.2281 & 0.1625 & 0.3656 & -0.1031 & 0.0250 & 0.0531 & 0.1031 & 2.0375 & & \\ & 0.9125 & 0.1344 & 0.1344 \\ -0.6656 & 0.2833 & -0.1094 & 0.1031 & 0.0917 & -0.0469 & 0.0531 & 0.0240 & 0.0156 & 0.5094 & 0.1635 & \\ & 0.0385 & 0.0156 \\ 0.5219 & -0.1094 & 0.2427 & -0.3656 & -0.0469 & 0.0917 & -0.1969 & 0.0156 & 0.0333 & 0.0406 & -0.0156 & 0.1948 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 2.0375 & -0.0406 & 0.5094 & -2.2250 & 0.2281 & 1.1344 & 0.1625 & 0.1031 & 0.3656 & 0.0250 & -0.1031 & 0.0531 \\ & 0.1948 & 0.0156 & -0.5219 & 0.2427 & 0.1094 & 0.3656 & 0.0917 & 0.0469 & 0.1969 & 0.0333 & -0.0156 \\ & 0.1635 & -0.6656 & 0.1094 & 0.2833 & 0.1031 & 0.0469 & 0.0917 & 0.0531 & -0.0156 & 0.0240 \\ & 5.4125 & -1.9156 & -1.9156 & -2.225 & -0.6656 & -0.5219 & -0.9625 & -0.0844 & -0.0844 \\ & 1.0698 & 0.5156 & 1.1344 & 0.2833 & 0.1094 & 0.5531 & 0.0917 & 0.0469 \\ & 1.0698 & 0.2281 & 0.1094 & 0.2427 & 0.5531 & 0.0469 & 0.0917 \\ & 2.0375 & 0.5094 & -0.0406 & 0.0250 & 0.0531 & -0.1031 \\ & 0.1635 & 0.0156 & 0.0531 & 0.0240 & -0.0156 \\ & 0.1948 & 0.1969 & -0.0156 & 0.0385 \\ & 0.9125 & 0.1344 & 0.1344 \\ & 0.0385 & 0.0156 & -0.0531 & 0.0240 & 0.0156 & 0.0844 & 0.0917 & -0.0469 & 0.1031 & 0.0333 & 0.0156 \\ & 0.0385 & -0.1031 & 0.0156 & 0.0333 & -0.0844 & -0.0469 & 0.0917 & 0.0531 & 0.0156 & 0.0240 \\ & 2.0375 & -0.5094 & -0.0406 & -2.2250 & -1.1344 & 0.2281 & 0.1625 & -0.3656 & 0.1031 \\ & 0.1635 & -0.0156 & 0.6656 & 0.2833 & -0.1094 & -0.1031 & 0.0917 & -0.0469 \\ & 0.1948 & -0.5219 & -0.1094 & 0.2427 & 0.3656 & -0.0469 & 0.0917 \\ & 0.1625 & -0.1031 & -0.3656 & 0.0250 & 0.1031 & -0.0531 & 2.0375 \\ & -0.3656 & 0.0917 & 0.0469 & -0.1969 & 0.0333 & -0.0156 & 0.0406 & 0.1948 \\ & -0.1031 & 0.0469 & 0.0917 & -0.0531 & 0.0156 & 0.0240 & 0.5094 & 0.0156 & 0.1635 \\ & -2.2250 & 0.6656 & 0.5219 & -0.9625 & 0.0844 & 0.0844 & -2.2250 & 0.5219 & 0.6656 & 5.4125 \\ & -1.1344 & 0.2833 & 0.1094 & -0.5531 & 0.0917 & 0.0469 & -0.2281 & 0.2427 & 0.1094 & 1.9156 & 1.0698 \\ & -0.2281 & 0.1094 & 0.2427 & -0.5531 & 0.0469 & 0.0917 & -1.1344 & 0.1094 & 0.2833 & 1.9156 & 0.6656 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 2.0375 & & & & & & & & & & & \\ -0.5094 & 0.1635 & & & & & & & & & & \\ & 0.0406 & 0.0156 & 0.1948 & & & & & & & & \\ & 0.0250 & -0.0531 & -0.1969 & 0.9125 & & & & & & & \\ & -0.0531 & 0.0240 & -0.0156 & -0.1344 & 0.0385 & & & & & & \\ & 0.1031 & -0.0156 & 0.0333 & -0.1344 & 0.0156 & 0.0385 & & & & & \\ & 0.1625 & -0.1031 & -0.3656 & 0.0250 & 0.1031 & -0.0531 & 2.0375 \\ & -0.3656 & 0.0917 & 0.0469 & -0.1969 & 0.0333 & -0.0156 & 0.0406 & 0.1948 \\ & -0.1031 & 0.0469 & 0.0917 & -0.0531 & 0.0156 & 0.0240 & 0.5094 & 0.0156 & 0.1635 \\ & -2.2250 & 0.6656 & 0.5219 & -0.9625 & 0.0844 & 0.0844 & -2.2250 & 0.5219 & 0.6656 & 5.4125 \\ & -1.1344 & 0.2833 & 0.1094 & -0.5531 & 0.0917 & 0.0469 & -0.2281 & 0.2427 & 0.1094 & 1.9156 & 1.0698 \\ & -0.2281 & 0.1094 & 0.2427 & -0.5531 & 0.0469 & 0.0917 & -1.1344 & 0.1094 & 0.2833 & 1.9156 & 0.6656 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 0.9125 & -0.1344 & 0.1344 & 0.0250 & -0.0531 & 0.1969 & -0.9625 & -0.5531 & 0.5531 & 0.0250 & -0.1031 & 0.0531 \\ & 0.0385 & -0.0156 & -0.0531 & 0.0240 & 0.0156 & 0.0844 & 0.0917 & -0.0469 & 0.1031 & 0.0333 & 0.0156 \\ & 0.0385 & -0.1031 & 0.0156 & 0.0333 & -0.0844 & -0.0469 & 0.0917 & 0.0531 & 0.0156 & 0.0240 \\ & 2.0375 & -0.5094 & -0.0406 & -2.2250 & -1.1344 & 0.2281 & 0.1625 & -0.3656 & 0.1031 \\ & 0.1635 & -0.0156 & 0.6656 & 0.2833 & -0.1094 & -0.1031 & 0.0917 & -0.0469 \\ & 0.1948 & -0.5219 & -0.1094 & 0.2427 & 0.3656 & -0.0469 & 0.0917 \\ & 0.1625 & -0.1031 & -0.3656 & 0.0250 & 0.1031 & -0.0531 & 2.0375 \\ & -0.3656 & 0.0917 & 0.0469 & -0.1969 & 0.0333 & -0.0156 & 0.0406 & 0.1948 \\ & -0.1031 & 0.0469 & 0.0917 & -0.0531 & 0.0156 & 0.0240 & 0.5094 & 0.0156 & 0.1635 \\ & -2.2250 & 0.6656 & 0.5219 & -0.9625 & 0.0844 & 0.0844 & -2.2250 & 0.5219 & 0.6656 & 5.4125 \\ & -1.1344 & 0.2833 & 0.1094 & -0.5531 & 0.0917 & 0.0469 & -0.2281 & 0.2427 & 0.1094 & 1.9156 & 1.0698 \\ & -0.2281 & 0.1094 & 0.2427 & -0.5531 & 0.0469 & 0.0917 & -1.1344 & 0.1094 & 0.2833 & 1.9156 & 0.6656 \end{bmatrix}$$

さて、式(16),(17)に含まれる未知定数 λ_n の決定式は、弾塑性境界 $\sigma = \sigma_E$ におけるミーゼスの条件式より

でのごとく求められる。すなわち式(2)に $A = E/2G \cdot |Z|$ を代入して、

$$(\alpha_x \alpha_y \alpha_{xy})^T = \alpha_0 |Z| (E_1 E_2 E_3)^T \text{ ----- (18)}$$

ここに $\alpha_0 = 4G(E/a)$, $(E_1 E_2 E_3)^T = D_0(B)C^T(U^0)$, $(U^0) = (u_0 v_0 w_0)^T$, $U_0 = (2\psi/a \ \theta_x^0 \ \theta_y^0)^T$

ただし $2\psi, \theta_x^0, \theta_y^0$: 頂点 i ($i=A, B, C, D$) のたわみおよび x, y 軸回りの回転角。

式(18)をミーズス条件に代入のうえ整理すれば Z の決定式として次式をうる。

$$|Z| = (\alpha_0/\alpha_0) (3F)^{-1/2} \text{ ----- (19)}$$

$$\text{ただし } F = (E_1^2 + E_2^2 - E_1 E_2) + E_3 \text{ ----- (20)}$$

4. 解法

上記誘導の *Stiffness Matrix* (K) を用うれば図-4に示すごとき片持矩形板の弾塑性解析が可能となる。すなわち、片持矩形板を図-4のごとき $p \times q$ 個の正方形板要素に分割したうえ、各節点での釣合式を求めれば、結局次の剛性方程式がえられる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{p1} & \dots & K_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_q \end{bmatrix} \text{ ----- (21)}$$

ここに $(U_j) = (u_j/a \ \theta_x^j \ \theta_y^j)^T$,

ただし $u_j, \theta_x^j, \theta_y^j$: 節点 j のたわみおよび x, y 軸回りの回転角。

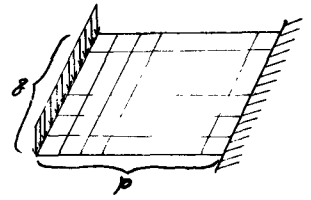


図-4

式(21)は直接解くことができないので下記のごとき *trial-and-error method* を採用する。すなわち、まず式(21)の諸係数に含まれる λ_n 値を $\lambda_n = 1$ と仮定して解き、その結果えられる変形成分 U_j の第1近似値を式(13)に代入して各板の Z 値を算出し、式(13)より λ_n の第1近似値を決定する。次いでこの λ_n を用いて式(14,16)より新たに各板の *Stiffness Matrix* を求め、再び式(21)を連立に解いて変形成分の第2近似値を算出する。以下同様の演算操作を各値が所要の精度に収斂するまでくり返し行う。

なお、塑性ヒンジ発生後はたわみ角の不連続性に伴って塑性ヒンジ点での回転角が新たな未知数として生ずるゆえ、これに対処すべく次の条件式が必要となる。すなわち、節点 S (本例では明らかに固定端に生ずる) は塑性ヒンジが発生したと仮定すれば、式(11), (20)より次式が成立する。

$$\lambda_{ns} F_S - \frac{\sigma}{F} \text{Max}(F_S) = 0 \text{ ----- (22)}$$

ただし λ_{ns}, F_S : 節点 S の λ_n および F 値、

$\text{Max}(F_S)$: 弾性限界時における F の最大値。

5. 結語

3次元の塑性領域の広がりや考慮した正方形板要素の *Stiffness Matrix* が式(14), (16)で求められるゆえ、これを用いれば任意境界条件を有する単一矩形板のみならず、連続板などに対しても従来の変形法に準じた弾塑性解析が *trial-and-error method* によって一般的に可能となるが、これらについては後日発表の予定である。

(参考文献)

(1) ソコロフスキイ, 塑性学, 朝倉書房, 昭和34年9月

(2) 山崎太田馬場先: 点支承をもつ矩形板の変形法公式, 第22回土木学会年次学術講演会講演概要 昭和42年5月。