

九州大学 正員 山崎徳也

〃 正員 彦坂 照

〃 学生員 羽根悟朗

1. 緒言

鉄筋コンクリートはりのクリープ応力に関しては、既に Diskinger⁽¹⁾ および 京大岡田教授⁽²⁾ が プレーンコンクリートのクリープ特性 (クリープ係数) を利用した近似解法を提案し、また近年 Arutyunyan⁽³⁾ が、実験データから決定した creep function を用いた、単鉄筋コンクリートはりのクリープ応力に関するかなり厳密な解法を発表している。Arutyunyan の手法によればコンクリートおよび引張鉄筋の応力が材令および経過時間の関数として求められる点に、文献 (1), (2) に比して著しい利点を認めうるが、対象を単鉄筋コンクリートはりに限っている点で理論的一般性を欠き、また実際構造物で当然問題となるクリープによるはりのたわみについて全く触れていないのは片手落ちといえる。

本研究は、複鉄筋コンクリートはりを対象として、先ずクリープを考慮したたわみ曲線の微分方程式を誘導し、次いで、これを与えられた境界条件と初期条件のもとで解くことにより、任意時刻におけるはりのたわみとコンクリートおよび鉄筋の応力をそれぞれ求めうるごとくしたもので、当然ながら単鉄筋コンクリートはりは一特例として本研究に包含されることになる。

本研究で取り扱う鉄筋コンクリートはりには、コンクリートのクリープ理論で普通一般に認められている Davis-Grannville の法則および Whitney の法則のほか、Bernoulli の平面保持の法則がなりたつものとし乾燥収縮の影響は無視することとする。コンクリートの引張応力については、これを考慮する場合と無視する場合の両方について計算を行ったが、引張応力を考慮する場合には、コンクリートの弾性係数は引張側と圧縮側で等しい値をとるものと仮定する。

2. クリープを考慮したコンクリートの応力-ひずみ関係式

いま材令 τ のコンクリートに単位の持続応力 σ_c が加えられたものとすれば、時刻 t におけるコンクリートの総ひずみ $\delta(t, \tau)$ は、弾性ひずみとクリープひずみの和として次式で表わされる。

$$\delta(t, \tau) = 1/E_c(\tau) + C(t, \tau) \quad (1)$$

ここに $E_c(\tau)$: 材令 τ のコンクリートの弾性係数

$C(t, \tau)$: 時刻 τ から時刻 t までの間に生じたクリープひずみ。

したがって、材令 τ のコンクリートに任意の持続応力 $\sigma_c(t)$ が加えられた時、時刻 t におけるコンクリートの総ひずみ $\epsilon_c(t)$ は、Davis-Grannville の法則および Whitney の法則により次のごとく表わすことができる。

$$\epsilon_c(t) = \sigma_c(\tau) \delta(t, \tau) + \int_{\tau_1}^t \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \delta(t, \tau) d\tau \quad (2)$$

$C(t, \tau) = 0$ に注意して式 (2) の右辺第 2 項を部分積分すれば容易に次式がえられる。

$$\xi_c(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c(t)} - \int_{t_1}^t \sigma_c(\tau) \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{E_c(\tau)} + C(\tau, \infty) \right] \cdot C \quad (3)$$

本論文において、creep function $C(t, \tau)$ の関数形は Arutunyan⁷⁾ 提案した式式を用いるものとする。すなわち

$$C(t, \tau) = p(\tau) [1 - e^{-r(t-\tau)}], \quad p(\tau) = A_1/\tau + C_0 \quad (4)$$

ここに r , A_1 および C_0 は任意定数

式(3)に式(4)を代入し、式(3)の両辺を t で 2 回微分して整理すれば、結局 $\sigma_c(t)$ に関する次の2階常微分方程式がえられる。

$$\ddot{\sigma}_c(t) + \dot{\sigma}_c(t) \{ r[1 + p(t) E_c(t)] - \dot{E}_c(t)/E_c(t) \} = E_c(t) \{ \ddot{\xi}_c(t) + r \dot{\xi}_c(t) \} \quad (5)$$

また $t = t_1$ における $\sigma_c(t)$ の初期条件が次式で与えられる。

$$\sigma_c(t_1) = E_c(t_1) \xi_c(t_1), \quad \dot{\sigma}_c(t_1) = E_c(t_1) \dot{\xi}_c(t_1) - r p(t_1) E_c(t_1) \sigma_c(t_1) \quad (6)$$

式(5)の微分方程式の一般解は古典的求積法により容易に与えられ、これに式(6)の初期条件を与えれば、所要のクリープを考慮した鉄筋コンクリートの応力-ひずみ関係式が次式のとく求められる。

$$\sigma_c(t) = \sigma_c(t_1) + \int_{t_1}^t e^{-\eta(\tau)} \left\{ \dot{\sigma}_c(t_1) + \int_{t_1}^{\tau} E_c(\tau) \{ \ddot{\xi}_c(\tau) + r \dot{\xi}_c(\tau) \} e^{\eta(\tau)} d\tau \right\} d\tau \quad (7)$$

$$\eta(\tau) = \int_{t_1}^{\tau} \{ r[1 + p(\tau) E_c(\tau)] - \dot{E}_c(\tau)/E_c(\tau) \} d\tau$$

3. クリープを考慮した鉄筋コンクリートはりのたわみ曲線の微分方程式

図-1 のごとく、鉄筋コンクリートはりの断面の中立軸に於て X 軸を、垂直下方に Z 軸を定められる。以下の理論に用いる記号の意味をまとめて示せば次のとおりである。

M : 断面の曲げモーメント

E_s : 鉄筋のヤング係数 $n(t) : E_s/E_c(t)$

$\sigma_c(t), \sigma_{st}(t), \sigma_{sc}(t)$: コンクリート, 引張鉄筋, 圧縮鉄筋の応力度。

$\epsilon_c(t), \epsilon_{st}(t), \epsilon_{sc}(t)$: コンクリート, 引張鉄筋, 圧縮鉄筋のひずみ

A_c, A_{st}, A_{sc} : $\square, \square, \square$ の断面積

I_c, I_{st}, I_{sc} : $\square, \square, \square$ の中立軸に関する断面二次モーメント

はりの Z 方向のたわみを $w = w(t, x)$ とすれば、中立軸から Z の距離にある点のひずみ $\epsilon(t)$ は次式で表わされる。

$$\epsilon(t) = -Z \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \quad (8)$$

断面の中立軸に関するモーメントの釣合より次式が成立する

$$M = \int_{A_c} \sigma_c(t) Z dA_c + \int_{A_{st}} \sigma_{st}(t) Z dA_{st} + \int_{A_{sc}} \sigma_{sc}(t) Z dA_{sc} \quad (9)$$

式(9)および $\sigma_{st}(t) = E_s \epsilon_{st}(t)$, $\sigma_{sc}(t) = E_s \epsilon_{sc}(t)$ の関係式を式(9)に代入し、さらに式(8)を用いれば、式(9)は次式のとく書き換えられる。

$$M = -E_c(t_1) I_c \frac{\partial^2 w(t_1, X)}{\partial X^2} - E_s (I_{st} + I_{sc}) \frac{\partial^2 w(t_1, X)}{\partial X^2} - E_c(t_1) I_c \left\{ \frac{\partial^2 w(t_1, X)}{\partial X^2} - r p(t_1) E_c(t_1) \frac{\partial^2 w(t_1, X)}{\partial X^2} \right\} \int_{t_1}^t e^{-\eta(\tau)} d\tau$$

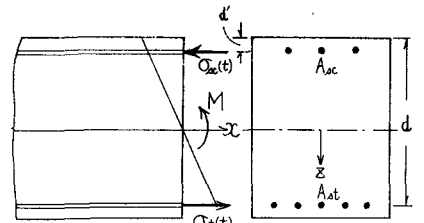


図 - 1

$$-\int_{\tau_1}^t \left[e^{-\int_{\tau_1}^{\tau} E_c(\tau) I_c \left\{ \frac{\partial^2 \ddot{w}(\tau, x)}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau, x)}{\partial x^2} \right\}} e^{\int_{\tau_1}^{\tau} d\tau} \right] d\tau \quad (10)$$

式(10)の両辺をもて2回偏微分して整理すれば、 $w(t, x)$ の t, x に関する4階の偏微分方程式が次の式(11)のごとく求められる。

$$\frac{\partial^2 \ddot{w}(t, x)}{\partial x^2} + \left\{ \gamma \left[1 + \frac{\rho(t) E_c J}{1 + n(t) J} \right] - \frac{\dot{E}_c(t) n(t) J}{E_c(t) [1 + n(t) J]} \right\} \frac{\partial^2 \dot{w}(t, x)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ただし } J = (I_{wt} + I_{wc}) / I_c \quad (11)$$

また、 $w(t, x)$ の $t = \tau_1$ における初期条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 w(\tau_1, x)}{\partial x^2} = -\frac{M}{E_c(\tau_1) I_c [1 + n(\tau_1) J]}, \quad \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau_1, x)}{\partial x^2} = \frac{\gamma E_c(\tau_1) \rho(\tau_1)}{1 + n(\tau_1) J} \frac{\partial^2 w(\tau_1, x)}{\partial x^2} \quad (12)$$

4. クリープを考慮した鉄筋コンクリートはりの解法

式(11)の微分方程式の解が次の式(13)のごとき変数分離形で与えられるものと仮定する。

$$w(t, x) = T(t) \cdot W(x) \quad (13)$$

式(13)を式(11)、式(12)に代入すれば、それぞれ $W(x)$ 、 $T(t)$ に関する2階常微分方程式が次の式(14)、(15)で与えられることが見出される。

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = -\frac{M}{E_c(\tau_1) I_c [1 + n(\tau_1) J]} \quad (14)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \left\{ \gamma \left[1 + \frac{\rho(t) E_c J}{1 + n(t) J} \right] - \frac{\dot{E}_c(t) n(t) J}{E_c(t) [1 + n(t) J]} \right\} \frac{dT}{dt} = 0 \quad (15)$$

式(14)は通常の弾性はりのたわみ曲線の微分方程式で、荷重および境界条件が与えられるれば容易に解くことができる。また式(15)は式(5)の場合と同じく古典的求積法により解を求めることができ、結果の例示は次のごとくである。

$$T(t) = 1 + \frac{\gamma E_c(\tau_1) \rho(\tau_1)}{1 + n(\tau_1) J} \int_{\tau_1}^t e^{-\int_{\tau_1}^{\tau} d\tau} \quad (16)$$

$$\text{ここに } f(\tau) = \left\{ \gamma \left[1 + \frac{\rho(t) E_c J}{1 + n(t) J} \right] - \frac{\dot{E}_c(t) n(t) J}{E_c(t) [1 + n(t) J]} \right\}$$

式(13)より明らかなごとく、 $T(t)$ は時間の経過による鉄筋コンクリートはりのたわみの変化を示す係数であり、式(16)は $T(t)$ が $T(t) \geq 1$ の単調増加関数であることを示している。さらに式(18)より次式がえられる。

$$E(t) = -\gamma T(t) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xt}(t) &= E_c E_c(t) = -E_c \gamma_c T(t) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \sigma_{xt}(\tau_1) T(t) \\ \sigma_{xc}(t) &= E_c E_c(t) = -E_c \gamma_c T(t) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \sigma_{xc}(\tau_1) T(t) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式(18)は、引張鉄筋、圧縮鉄筋ともにコンクリートのクリープによって一様に応力が増大することを示し、かつその割合ははりのたわみの増加係数 $T(t)$ に等しいことを示している。

他方、コンクリートの応力は式(7)より求められ、式(17)に式(17)を代入して整理すれば結局 $U(t)$ が次式にて表わされる。

$$\sigma_c(t) = \gamma \frac{M}{I_c [1 + n(\tau_1) J]} U(t) = \sigma_c(\tau_1) U(t) \quad (19)$$

$$U(t) = 1 - \frac{\gamma \rho(\tau_1) E_c J}{1 + n(\tau_1) J} \int_{\tau_1}^t e^{-\int_{\tau_1}^{\tau} d\tau} \quad (20)$$

$U(t)$ は時間の経過によるコンクリートの応力の変化を示す係数であり、式(20)は $U(t)$ が $U(t) \leq 1$ の

単調減少関数であること、またコンクリートの応力-クリープ係数に減少することによる。

5. 計算例 : 3に取らねる鉄筋コンクリートはりとして、 $t_1 = 28$ 日 (養生期間をもち、材料によるコンクリートの弾性係数の変化は無視する。式(4)の creep-function を決定する任意定数は文献(3)により、 $\delta = 0.026$, $A_1 = 4.82 \times 10^{-5}$, $C_0 = 0.7 \times 10^{-6}$ を採用した。式(16)および式(20)の定積分は解析的に求められ、かつ Simpson の公式を用いて電算により演算を行った。図2および図3は圧縮鉄筋比の増加によるコンクリートと鉄筋のクリープ応力の時間変化の様相を図-2, 3, 4にまとめて示し、解析結果を要約して述べては以下のごとくである。

- (i) 鉄筋比が増加すれば、はりのクリープ歪みは減少し、鉄筋の応力増加の割合は小さくなり、コンクリートの応力は減少の傾向を強める。
- (ii) 適当の圧縮鉄筋を用いることは、クリープ変形の増大を緩和し、短時間で最終クリープ変形に到達する効果が著しい。

(iii) コンクリートの引張応力の考慮・無視は本法によるクリープ解析にほとんど影響をおよぼさない。

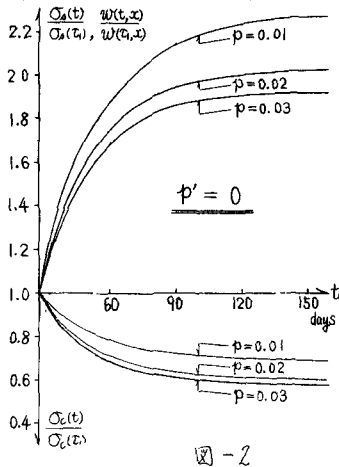


図-2

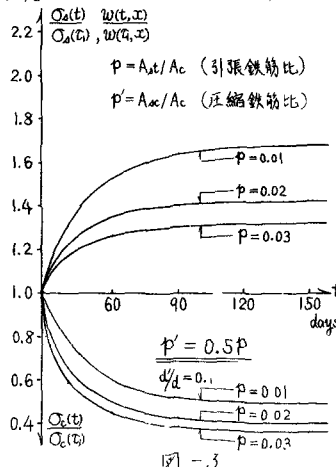


図-3

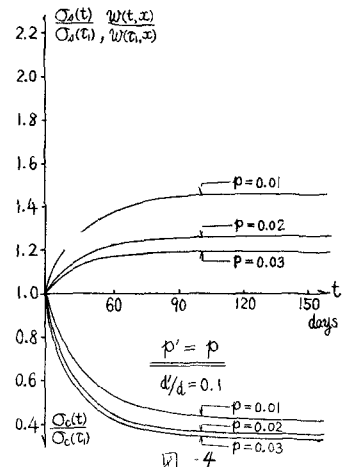


図-4

6. 結語 本論文は、鉄筋コンクリートはりのクリープを考慮したたわみ曲線に基づき、引張・圧縮両鉄筋およびコンクリートの曲げクリープ応力を解析する手法を提示し、簡単な計算例により、各種の鉄筋比を有する単鉄筋および複鉄筋コンクリートはりのクリープ特性を明らかにしたものである。

本研究で求めた鉄筋コンクリートはりのたわみ曲線 $w(t, x)$ を用いれば、鉄筋コンクリート部材に対するクリープたわみ角式を誘導することはでき、曲げクリープ解析の材料を連続はりやラーメン等の不静定構造物に拡張しうることとなる。また本研究の単軸クリープ理論を2次元クリープ理論に拡張して鉄筋コンクリートスラブの曲げクリープ解析を行うことも可能となる。(4)

[参考文献]

- (1) Fr. Dischinger: Elastische und Plastische Verformung der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken. Bauing. 20, 1937.
- (2) 田中 清: 鉄筋コンクリート梁のクリープ応力近似解. 土木学会誌 36巻5号, 昭和26年5月.
- (3) N. K. Arutyunyan: Some Problems in the Theory of Creep in Concrete Structures. Pergamon Press 1966
- (4) 山崎・廣坂: 鉄筋コンクリートスラブの曲げクリープ解析. 昭和42年度土木学会西部支部研究発表会論文集 昭和43年2月