

九州大学 正員 山崎徳世

〃 学生員 石川信隆

〃 〃 〃 千岩敏郎

1. 緒言 従来の塑性設計法では $M-\phi$ 曲線を図-1のごとく完全弾塑性モデルと仮定して理論展開を行なっているが、鋼構造物の弾塑性挙動に関する多くの実験結果によれば、図-2に示すごときひずみ硬化による影響も無視できないことが報告されている。なかでもM.G.Lay¹⁾はかかる影響をはり構造物に導入するため、従来の「塑性ヒンジ」の代りに「Circular Length」というひずみ硬化領域を考慮した新しい解析法を提案しているが、これは塑性設計法より実状に一歩促したものである。本研究はこの「Circular Length Method」をさらに多層多スパンラーメンに应用拡張し、これと従来の塑性設計法との比較検討を行わんとするものである。

2. 基本的考察 (1) 「Circular Length」の定義

いま $M-\phi$ 曲線をひずみ硬化の影響を考慮して図-2のごとく仮定すれば、図-3(a)の片持ちはりABにひずみ硬化領域(Length)が発生するときの M -図および ϕ -図は同図(b),(c)に示すごとなり、A-C間での曲率すなわち図-3(c)の斜線部は図-4のごとく曲率成分I, II, IIIに分割できる。したがって各曲率成分における任意点の曲率 ϕ はそれぞれ次のごとく表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= M/EI \\ \phi_2 &= (S-1)M_p/EI \\ \phi_3 &= (h-1)(M-M_p)/EI \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし EI : 曲げ剛性, M_p : 塑性モーメント

$S = \epsilon_{st}/\epsilon_y$, ϵ_{st} : ひずみ硬化に入るときひずみ, ϵ_y : 降伏ひずみ, h : ひずみ硬化の勾配に関する係数

ここでひずみ硬化領域における曲率を線型化するため、曲率成分IIIを省略して曲率成分IおよびIIのみを用いるものとすれば、結局ひずみ硬化領域での曲率 ϕ_s は次式で表わされることとなる。

$$\phi_s = \phi_1 + \phi_2 = M/EI + (S-1)M_p/EI \quad (2)$$

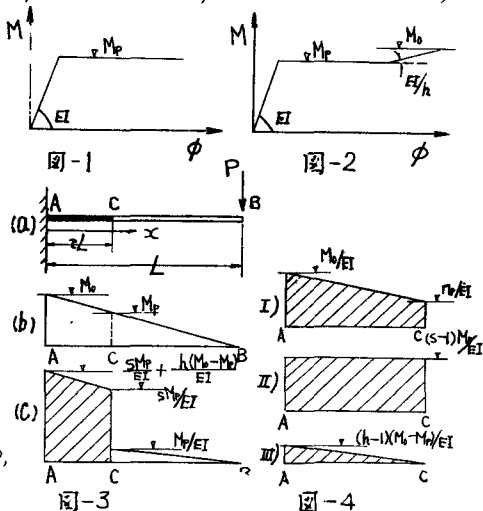
よって式(2)および ϕ -法公式²⁾を用うれば、図-3(a)の片持ちばりの荷重載荷点Bのたわみ δ が次式のごとく求められる。

$$\delta = \int_0^L \phi_e(L-x) dx + \int_0^L \phi_s(L-x) dx - \int_0^L \phi_e(L-x) dx + \int_0^L (\phi_s - \phi_e)(L-x) dx \quad (3)$$

しかるに $\phi_e = \phi_1 = M/EI$, $\phi_s - \phi_e = \phi_2$ なるゆえ、上式は微少項を省略して結局次式のごとく整理される。

$$\delta = PL^3/(3EI) + 2L \cdot \phi_2 \cdot L \quad (4)$$

式(4)の第1項は弾性たわみ δ^e (図-5(a)参照)に、第2項は以下に考察するごとく幾何学的見地より塑性たわみ δ^p (図-5(b)参照)に該当する。まず ϕ_2 が一定であるゆえ、図-5(b)に示すごとく一定半径 $R (= \frac{1}{\phi_2} = \frac{EI}{(S-1)M_p})$ を有する円をA端に接するごとく描き、ひずみ硬化領域 $2L$ を弧長ACで近似



すれば $\angle AOC$ は $\theta_H = r/L$ となり、さらに半径 OC に垂線 CB とすれば δ^H が幾何学的関係より次式のごとく求められる。

$$\delta^H = (L - rL) \sin(r^2/L) + R - R \cos(r^2/L) = L r^2/L = rL \phi_H = \theta_H L \quad (5)$$

また r^2/L は I 型断面鋼部材で最大 0.05° であるゆえ $r \ll L$ と見做した。以上より図-5(b) のひずみ硬化領域 rL を以後 'Circular Length' と呼ぶことにし、この rL は曲げモーメントの適合条件、すなわち図-3(b) の C 点の算出曲げモーメントが M_p に等しかるべき条件より次式のごとく求められる。

$$rL = (PL - M_p) L / PL \quad (6)$$

なお、 rL を P の一次関数にするため、 $r \ll L$ なることを考慮して、ここでは式(6)の分母の PL を M_p に置換した次式を用いることとする。

$$rL = (PL - M_p) L / M_p \quad (7)$$

(2) 誤差の検討

図-3(a) の片持ちはりについて、本法によるたわみ δ_1 と図-2 の $M-\phi$ 関係を用いるときのたわみ δ_2 とを比較検討すれば、図-6 のごとくより局部座屈¹⁾がおこると予想される $P = 1.15 M_p/L$ のときで、 δ_1 と δ_2 との誤差は 8% で、本法がかなり良好な精度をもつことが分かる。

また $S = 11$, $h = 50$ を用いた。

3. ラーメン構造物への応用 前記 2(1) で考察したごとく 'Circular Length' を考慮すれば弾塑性たわみは弾性たわみ δ^E と塑性たわみ δ^H とを加算することによって求められることになるが、ここではその重ね合わせを利用してラーメンの弾塑性解析に対する解説を試みる。

(1) 基本式の誘導 まず図-7(a) のラーメンを考え、同図(b) のごとく R_1, R_2, R_3L を不静定力に選べば、同図(c) の反力および荷重作用点の弾性たわみ δ_i^E ($i=1, 2, 3, 4$) および同図(d) の点 k ($k=1, 2, 3, 4, 5$) の曲げモーメント M_k は反力 R_i ($i=1, 2, 3$) および荷重 P の関数としてそれぞれ次式のごとく求められる。

$$\frac{EI}{L^3} [\delta^E] = [A][R] + [A_p]P \quad (8)$$

$$\frac{1}{L} [M] = [C][R] + [C_p]P \quad (9)$$

ただし $[A] = \begin{Bmatrix} A \\ A' \end{Bmatrix}$, $[A_p] = \begin{Bmatrix} A_p \\ A'_p \end{Bmatrix}$, $[C] = N \times N'$ 行列, $[C_p] = N' \times 1$ 行列
 N, N' は任意の整数

A 反力 $R_i = 1$ が作用したときの反力作用点の弾性たわみ ($\times EI/L^3$)

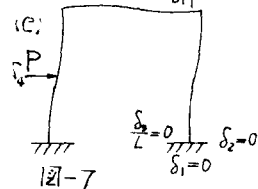
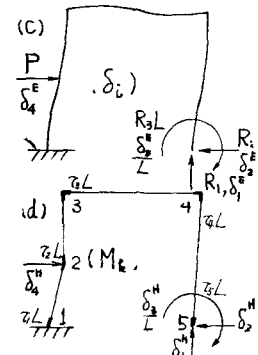
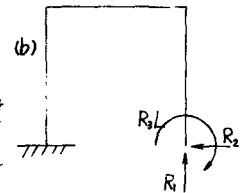
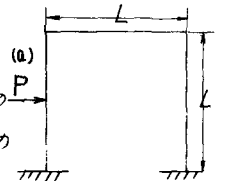
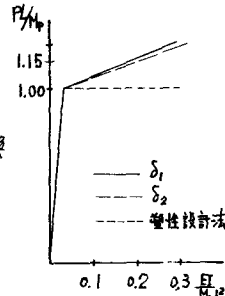
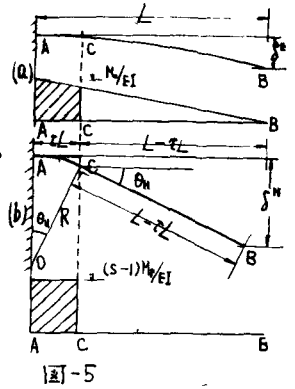
A' 反力 $R_i = 1$ が作用したときの荷重作用点の弾性たわみ ($\times EI/L^3$)

A_p 荷重 $P = 1$ が作用したときの反力作用点の弾性たわみ ($\times EI/L^3$)

A'_p 荷重 $P = 1$ が作用したときの荷重作用点の弾性たわみ ($\times EI/L^3$)

C 反力 $R_i = 1$ が作用したときの点 k のモーメント ($\times 1/L$)

C_p 荷重 $P = 1$ が作用したときの点 k のモーメント ($\times 1/L$)



一方、塑性解析より最終崩壊時の塑性変形図を追跡して求めれば図-7(d)のごときとなり、同図における点での・Circular Length・ α_k は式(7)に準じ、崩壊時のM-図を用いて式(10)のごとき、また点での塑性回転角 θ_{HK} は式(5)を用いて式(11)のごときそれぞれ求められる。

$$\alpha_k = (M_{ok} - M_{pk}) / (\alpha_k M_{pk}) \quad (k=1, 2, 3, 4, 5) \quad (10) \quad \theta_{HK} = \sum \alpha_k \alpha_k H_k \quad (11)$$

ただし α_k ・塑性解析にいう崩壊時のM-図よりえられる比例定数

H_k ・Near side 演算子で次のとき内容さもつ $M_{ok} > M_{pk}$ のとき $H_k = 1$, $M_{ok} < M_{pk}$ のとき $H_k = 0$
式(11)に式(10)および式(9)を代入したうで $E I_L$ を両辺に乘すれば下記の式(12)がえられる。

$$\frac{E I_L}{2} [\theta_H] = [Y][C][R] + [Y][C]P - [Y] \left[\frac{M}{L} \right] \quad (12)$$

ただし $Y_k = (L \phi_{HK} H_k / \alpha_k) (E I_L / M_{pk}) = H_k (5-1)$, α_k

よって式(5)および式(12)を用うれば結局望むたわみ δ^H が次式のごとき求められることとなる。

$$\frac{E I_L}{2} [\delta^H] = \left(\frac{E I_L}{2} \right) [B][\theta_H] = [B][Y][C][R] + [B][Y][C]P - [B][Y] \left[\frac{M}{L} \right] \quad (13)$$

ただし $[B] = \begin{bmatrix} B \\ B' \end{bmatrix}$ B ・図-7(d)で $\theta_{HK} = /$ を与えたときの反力作用点の塑性たわみ ($\times 1/2$)
 B' ・図-7(d)で $\theta_{HK} = /$ を与えたときの荷重作用点の塑性たわみ ($\times 1/2$)

つぎに、不静定力 $R_i (i=1, 2, 3)$ は図-7(e)のごとき固定条件 $\delta_i = \delta_i^E + \delta_i^H = 0$ ($i=1, 2, 3$) を用いて求められ、式(8)および式(13)より次式のごときえられる。

$$[R] = [G]^T [T] (M/L) - [G]^T [D] P \quad (14)$$

ただし $[G] = [A] + [B][Y][C]$, $[D] = [A_p] + [B][Y][C_p]$, $[T] = [B][Y] \left[\frac{M}{L} \right] (L/H_k)$ (15)

したがって点での曲げモーメント M_k は式(9)および式(14)より、また荷重作用点でのたわみ $\delta_i = \delta_i^E + \delta_i^H (i=1, 2, 3)$ は式(8), 式(13)および式(14)よりそれぞれ次式のごとき求められる。

$$[M] = [C][G]^T [T] M_p + P ([C_p] - [C][G]^T [D]) L \quad (16)$$

$$\frac{E I_L}{2} [\delta] = ([G][G]^T [T] - [T]^T) (M/L) + ([D] - [G][G]^T [D]) P \quad (17)$$

ただし G, D, T は式(15)において A, A_p, B をそれぞれ A', A'_p, B' に置換した値に合致する。

(2) 解法 以上の諸式を用うれば必ず硬化領域を考慮したラーメンの弾塑性解析が可能となるが、その解法骨子は慣用の弾性解析における応力法に類似であり、・Circular Length・を考慮した塑性たわみか加わるのみといえる。すなわちその演算過程をフローチャートに示せば図-8のごときなり、各断面が M_p に達するときの荷重値を逐次求め、そのときの曲げモーメントおよびたわみを算定することとなる。

4. 計算例 図-9(a)に示すとき1層2スパンラーメンに水平集中荷重 P が作用する場合に、水平変位 δ を初期降伏時より崩壊に至るまで求めれば次のごときである。まず式(8), (9)の $[A], [A_p], [C], [C_p], [A_p]$ を求めればそれぞれ表-1がえられる。ついで式(13)の $[B], [B']$ は図-9(b)のごとき最終崩壊時の塑性変形図より、また式(12)の $[Y]$ は図-9(c)の崩壊時のM-図を用いてそれぞれ求められ表-1に示す値となる。ただし $[Y]$ については α_k の算出に際しては、図-9(b)の塑性たわみに影響を与える $\alpha_k (k=1, 2, 3, 4)$ を用いることとした。

よって図-8のフローチャートに従って数値計算を行なえば、崩壊過程は図-10のごとき、また荷重たわみ曲線は図-11に示すごとくえられる。

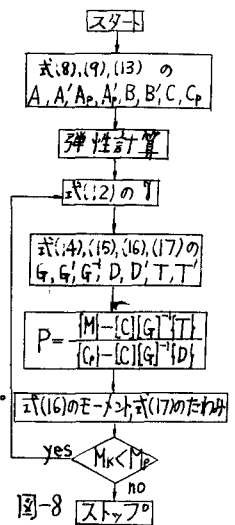


図-8

なお、本例では最大曲げモーメント M_0 を局部座屈がおこると予想される $M_0 = 1.15 M_p$ として計算を行なったが、これは最大耐力を塑性設計法による崩壊荷重値より約9%増加せしめている。

5. 結語

本論文はひずみ硬化領域を考慮したラーメンの实用的な弾塑性解析法を提示したもので、本研究の成果として以下の諸点が挙げられる。

(1) 一般にひずみ

硬化領域を考慮した厳密解は極めて繁雑であるが、本法のごとき 'Circular Length' を導入すれば '重ね合わせ' の原理が適用でき、演算が容易になることが認められた。

(2) 実用性に重点を置くため曲率成分 ϕ を省略し、また ϕ を L に比べ微小と見做したが、これらの誤差ははかなり小さいことが確認された。

(3) Heaviside 演算子 H_k を適宜用いることにより、初期降伏時より最終崩壊時までの追跡を可能ならしめた。

なお、M.G.Lay は最大曲げモーメント M_0 を極限応力 σ_u に起因した近似式を提案しているが、実際には M_0 に達する以前に局部座屈の発生が予想され、今後かかる影響を考慮した解析法の確立が望まれる。

参考文献 1) M.G.Lay: A New Approach to Inelastic Structural Design, Proc. I.C.E., Vol. 34, May, 1966 2) 山崎 太田 石川: 補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析, 土木学会論文集, 第134号, 昭和41年10月 3) M.G.Lay: Inelastic Beams Under Moment Gradient, Proc. A.S.C.E., St. Div. Feb. 1967

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \quad [A_p] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[A'] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad [A'_p] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad [B'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad [C_p] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [I] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} H_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} H_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} H_4 \end{bmatrix} \times (S-1)$$

表-1

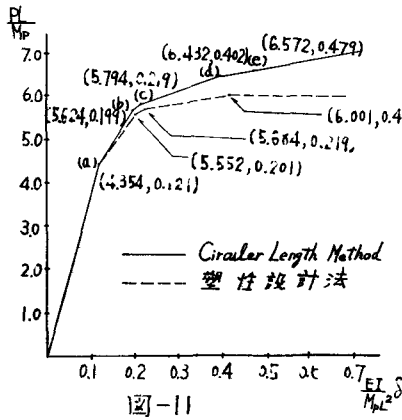


図-11

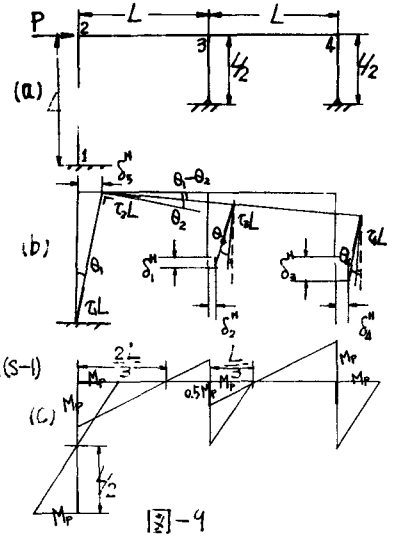


図-9

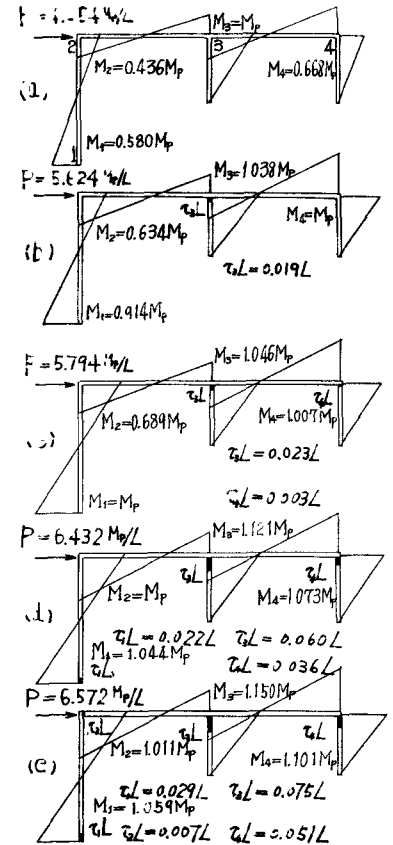


図-10