

九州大学 正員 山崎徳也

〃 〃 太田俊昭

〃 学生員 〇坂本結二

1. 序言 周知のごとく折板構造は折板作用によって縁がはりの役目をはたすゆえ、構造全体の剛性を高め、材料の節減をもたらす極めて経済的な構造様式であり、建築分野では屋根構造として多用されている他、高架水槽の塔、箱桁およびゲソンなどにも数多く用いられている。この分野に関する既往研究としては、各板をはりとみなして三せん断力方程式より縁に働くせん断力を求める実用解法¹⁾や、Fourier級数に基く解法²⁾などが数多く見受けられるが、本研究は各板の *Stiffness Matrix* を一つの基準直交座標に基いて誘導したうえで、いわゆる有限要素法を用いて、任意境界条件を有する一方向連続折板およびその特例である角筒折板の解法を述べたものである。

2. 一方向連続折板の変形法公式 図-1 に示すごとく空間に設置された固定座標(X, Y, Z)のXY平面に対し傾斜角 θ_0 を有し、1対辺AB, DCが任意支持条件を有し、他対辺AD, BCが弾性支持の矩形板ABCDを想定する。2辺AB, ADに沿って、Z軸を、さらにZ, Y軸と垂直下向きにX軸をとる。

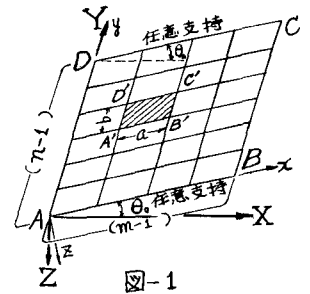


図-1

いまこの板のZ, YおよびX方向のたわみをそれぞれ w^x, w^y および w^z とし、またZ, YおよびX軸に関する回転角をそれぞれ θ^x, θ^y および θ^z とすれば、任意点 i の変形成分は一般に b 次の列ベクトルで次のように示される。

$$\{U_i\} = (w_i^x \ w_i^y \ w_i^z \ a\theta_i^x \ a\theta_i^y \ a\theta_i^z)^T \quad \text{----- (1)}$$

また、各変形成分に応じて、 i 点に作用する一般力が3軸方向の力 F_i^x, F_i^y および F_i^z ならびに3軸廻りのモーメント M_i^x, M_i^y および M_i^z により同じく b 次の列ベクトル $\{F_i\}$ で下記のごとく一般表示される。

$$\{F_i\} = (F_i^x \ F_i^y \ F_i^z \ M_i^x/a \ M_i^y/a \ M_i^z/a)^T \quad \text{----- (2)}$$

ただし、肩号 T は転置行列を表わす、 a : 矩形板要素の長辺の長さ。

さて矩形板ABCDを $(m-1) \times (n-1)$ 個の辺長 $a \times b$ の矩形板要素に分割すれば、この任意矩形板要素 $A'B'C'D'$ の頂点(Node) i に働く一般力 F_i ($i=A', B', C', D'$)と同点の変形成分 U_i との関係は、

Stiffness Matrix $[K]$ を媒介として、一般に次のごとく表わされる。

$$(F_i^x \ F_i^y \ F_i^z \ F_i^x \ F_i^y \ F_i^z)^T = [K] (U_i^x \ U_i^y \ U_i^z \ U_i^x \ U_i^y \ U_i^z)^T \quad \text{----- (3)}$$

$$\text{ここに} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_{AA} & \cdots & k_{AD} \\ \vdots & k_{ij} & \vdots \\ k_{DA} & \cdots & k_{DD} \end{bmatrix} \quad \text{ただし } i, j = A', B', C', D' \quad \text{----- (4)}$$

ここで、面内および面外変形に対応する矩形板 $A'B'C'D'$ の *Stiffness Matrix* をそれぞれ $[K^p]$ および $[K^b]$ とすれば、これらは文献(3)よりそれぞれ式(4)と同一形式の次式で一般表示される。

$$[K^p] = \begin{bmatrix} k_{AA}^p & \cdots & k_{AD}^p \\ \vdots & k_{ij}^p & \vdots \\ k_{DA}^p & \cdots & k_{DD}^p \end{bmatrix} \quad [K^b] = \begin{bmatrix} k_{AA}^b & \cdots & k_{AD}^b \\ \vdots & k_{ij}^b & \vdots \\ k_{DA}^b & \cdots & k_{DD}^b \end{bmatrix} \quad \text{----- (5)}$$

ただし、 $[k_{ij}^p]$: 2行2列の正方向行列で、詳細は文献(3)を参照のこと。

$[k_{ij}^b]$: 3行3列の正方向行列で、詳細は文献(3)を参照のこと。

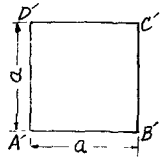
明らかに式(4)の小行列 k_{ij} は式(5)の小行列 k_{ij}^p および k_{ij}^b を合成したものであるゆえ、なる関係式をうる。

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{ij}^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{ij}^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{ij}^b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{ij}^b \end{bmatrix} \quad \text{----- (6)}$$

ただし $[k_{ij}] = [k_{ji}]$

特別として、ポアソン比 $\nu = 0.3$ で $a = b$ の等方性正方形板に対する $[k_{ij}]$ はそれぞれ以下に示す数値をとる。

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_0 \\ n_0 m_0 \\ d_0 \\ -b_0 n_0 \\ b_0 - b_0 n_0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} m_0 &= 4.96 \times \lambda \\ n_0 &= 1.95 \\ p_0 &= -0.15 \\ q_0 &= 2.86 \\ r_0 &= 3.14 \\ s_0 &= 1.04 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 10.56 \times \lambda \left(\frac{b}{a}\right)^2 \\ b_0 &= 2.44 \\ c_0 &= 4.56 \\ d_0 &= 0.56 \\ e_0 &= 2.14 \\ f_0 &= 1.44 \\ g_0 &= 0.86 \\ h_0 &= 1.52 \\ i_0 &= 0.30 \\ j_0 &= 0.48 \\ k_0 &= 0.38 \\ l_0 &= 0.62 \end{aligned}$$

$$[k_{12}] = \begin{bmatrix} p_0 - p_0 \\ p_0 a_0 \\ -c_0 - d_0 - e_0 \\ -d_0 i_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{21}] = \begin{bmatrix} m_0 \\ n_0 m_0 \\ d_0 \\ -b_0 n_0 \\ -b_0 d_0 n_0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{22}] = \begin{bmatrix} r_0 - n_0 \\ n_0 - n_0 \\ -f_0 q_0 - i_0 \\ -b_0 h_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{31}] = \begin{bmatrix} a_0 - f_0 \\ p_0 - p_0 \\ -c_0 e_0 - d_0 \\ -e_0 l_0 \\ -d_0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{32}] = \begin{bmatrix} m_0 \\ n_0 m_0 \\ a_0 \\ b_0 n_0 \\ -b_0 - b_0 n_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{E \alpha}{12(1-\nu^2)} \\ \nu &: \text{ポアソン比} \\ E &: \text{ヤング率} \\ \alpha &: \text{板の厚さ} \end{aligned}$$

$$[k_{33}] = \begin{bmatrix} a_0 p_0 \\ p_0 - p_0 \\ -c_0 e_0 d_0 \\ -e_0 l_0 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{34}] = \begin{bmatrix} r_0 n_0 \\ n_0 - n_0 \\ -f_0 q_0 q_0 \\ -g_0 h_0 \\ -g_0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{41}] = \begin{bmatrix} g_0 - p_0 \\ p_0 a_0 \\ -c_0 d_0 e_0 \\ d_0 j_0 \\ -e_0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{42}] = \begin{bmatrix} m_0 \\ n_0 m_0 \\ a_0 \\ b_0 n_0 \\ b_0 l_0 n_0 \end{bmatrix}$$

この合成 *Stiffness Matrix* $[K]$ を用いて矩形板 $ABCD$ の全分割節点で x, y, z 方向の釣合方程式をたると一般に次の剛性方程式をうる。

$$\{F\} = [S]\{U\} \quad \text{----- (7)}$$

ここに全節点数を T_0 とすれば、外力 $\{F\}$ (弾性支持点の不静定力を含む) および変形成分 $\{U\}$ は $6T_0$ 次の列ベクトル、 $[S]$ は $6T_0$ 次の正方向行列である。

一方、直交座標 (x, y, z) を固定座標 (X, Y, Z) に変換する変換行列は次式で定義される。

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \quad \text{----- (8)}$$

いま固定座標に関する作用点 i の外力および変形成分をそれぞれ

$$\{F_i^*\} = (F_i^x \ F_i^y \ F_i^z \ M_i^x/a \ M_i^y/a \ M_i^z/a)^T, \quad \{U_i^*\} = (u_i^x \ u_i^y \ u_i^z \ \alpha u_i^x \ \alpha u_i^y \ \alpha u_i^z)^T$$

で表わせば、 F_i^* および $\{U_i^*\}$ との関係は

$$\{U_i^*\} = [\Phi]\{U_i\}, \quad \{F_i^*\} = [\Phi]\{F_i\} \quad \text{----- (9)}$$

$$\text{ここに} \quad [\Phi] = \begin{Bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{Bmatrix}$$

したがって板全体の外力および変形成分に関しても同様の関係が成立し次式となる。

$$\{F^*\} = [L]\{F\}, \quad \{U\} = [L]^T\{U^*\} \quad \text{----- (10)}$$

ここに $\{F^*\}, \{U\}$ は固定座標に関する板全体の一般力および変形成分, $[L] = \begin{Bmatrix} \Phi & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \Phi & 0 & \\ 0 & 0 & \Phi & \\ \vdots & & & \ddots \end{Bmatrix}$

式(7), (10)より固定座標に関する剛性方程式が次のごとく導かれる。

$$\{F^*\} = [S^*]\{U\} \quad \text{----- (11)}$$

$$\text{ここに} \quad [S^*] = [L][S][L]^T$$

しかるに外力 $\{F^*\}$ は荷重による外力 $\{F_G, F_N\}^T$ と弾性支承部に働く不静定力 $\{\bar{F}_G\}$ とに区分されるゆえ、式(11)は下部のごとく書き改められる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_G \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{GG}^* & S_{GN}^* \\ S_{NG}^* & S_{NN}^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_G \\ U_N \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_G \\ F_N \end{Bmatrix} \quad \text{----- (12)}$$

ただし $\{\bar{F}_G\}$: 弾性支承部ごとの荷重による外力, $\{F_N\}$: 弾性支承部を除く全節点ごとの荷重による外力, $\{\bar{U}_G\}$: 弾性支承部の変形成分, $\{U_N\}$: 弾性支承部を除く全節点の変形成分。

さらに式(12)を展開して

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_G \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{GG}^* \\ S_{NG}^* \end{Bmatrix} \{\bar{U}_G\} + \begin{Bmatrix} S_{GN}^* \\ S_{NN}^* \end{Bmatrix} \{U_N\} + \begin{Bmatrix} F_G \\ F_N \end{Bmatrix} \quad \text{----- (13)}$$

式(13)より $\{U_N\}$ を消去すれば

$$\{\bar{F}_G\} = [\bar{S}]\{\bar{U}_G\} + \{\bar{F}_G\} \quad \text{----- (14)}$$

$$\text{ここに} \quad [\bar{S}] = (S_{GG}^* - S_{GN}^* (S_{NN}^*)^{-1} S_{NG}^*), \quad \{\bar{F}_G\} = \{F_G\} - S_{GN}^* (S_{NN}^*)^{-1} \{F_N\}$$

$$\text{また} \quad \{\bar{F}_G\} = (\bar{F}_{AG}, \bar{F}_{BG})^T, \quad \{\bar{U}_G\} = (\bar{U}_A, \bar{U}_B)^T, \quad \{F_G\} = (F_{AG}, F_{BG})^T, \quad [\bar{S}] = \begin{Bmatrix} \bar{S}_{AA} & \bar{S}_{AB} \\ \bar{S}_{BA} & \bar{S}_{BB} \end{Bmatrix}$$

$\{F_{AG}\}, \{F_{BG}\}$: それぞれ弾性支承部 AD および BC の全節点の不静定力,

$\{\bar{F}_{AG}\}, \{\bar{F}_{BG}\}$: それぞれ弾性支承部 AD および BC ごとの荷重による外力。

一般に弾性支承部では変位あるいは回転角などが部分的に拘束され、この場合が多く、したがってこれらの拘束条件を考慮した変形法公式が当然要求される。このため、この拘束条件を含めて包含する行列 $[R]$ (拘束行列と呼ぶことにする) を新たに定義導入することにより、すなわち、拘束行列を 6 点次の単位行列より、拘束された変形成分に対応する行のみを除いた行列で定義すれば、次の関係式が成立する。

$$\{F_G\} = [R]\{\bar{F}_G\}, \quad \{\bar{U}_G\} = [R]^T\{U_G\} \quad \text{----- (15)}$$

ただし $\{F_G\}, \{U_G\}$: それぞれ $\{\bar{F}_G\}, \{\bar{U}_G\}$ より拘束力に対応する行のみを除いた列ベクトル。

式(14)に式(15)を代入のうえ整理すれば、所要の変形法公式が最終的にえられ次式となる。

$$\{F_G\} = [S]\{U_G\} + [R]\{\bar{F}\} \quad \text{----- (16)}$$

$$\text{ここに} \quad [S] = [R][\bar{S}][R]^T, \quad \{F_G\} = (F_{AG}, F_{BG})^T, \quad \{U_G\} = (U_A, U_B)^T$$

ただし $\{F_{AG}\}, \{F_{BG}\}$: それぞれ弾性支承部 AD および BC において拘束された節点以外の節点に作用する不静定力, $\{U_A\}, \{U_B\}$: それぞれ弾性支承部 AD および BC において拘束された節点以外の節点の変形成分。

3. 解法 図-2 に示すごとく、XY面に対して任意の傾斜角を有する n 組の矩形板が連結された折板の応力解析を上記諸式の変形法公式を用いて行えば以下のごとくである。すなわち 第 i 番目の矩形板に左向き面に働く一般力を $\{F_{BA}^i, F_{AB}^i\}$ で、変形成分を $\{U_{Li}, L_{Li}\}$ で示せば、式(15)より次式が成立する。

$$\begin{Bmatrix} F_{AB}^i \\ F_{BA}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{AA}^i & S_{AB}^i \\ S_{BA}^i & S_{BB}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{Li} \\ L_{Li} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{A3}^i \\ F_{B3}^i \end{Bmatrix} \quad (17)$$

さて、稜 i に外力 $\{P_i\}$ が作用するときの一般力の釣合式は、

$$\{F_{BA}^i\} + \{F_{AB}^{i+1}\} - \{P_i\} = 0 \quad (18)$$

よって式(18)に式(17)を代入のうえ整理すれば、

$$\{S_{BA}^i\} \{U_{Li}\} + \{S_{AB}^i + S_{AA}^{i+1}\} \{U_{Li}\} + \{S_{AB}^{i+1}\} \{U_{Li+1}\} - \{P_i\} = 0 \quad (19)$$

$$\text{ただし } \{P_i\} = \{P_i\} - \{F_{BA}^i\} - \{F_{AB}^i\}$$

稜0 から稜 n までについての上記釣合式を合成すれば、式(20)の結果をうる。なお式(21)は図-3 に示す角筒折板に対する解を示したものである。

$$\begin{bmatrix} [S_{AA}^1] & [S_{AB}^1] \\ [S_{BA}^1] & [S_{BB}^1 + S_{AA}^2] & [S_{AB}^2] \\ & [S_{BA}^2] & [S_{BB}^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} [S_{BB}^1 + S_{AA}^2] & [S_{AB}^2] \\ [S_{BA}^2] & [S_{BB}^2 + S_{AA}^3] & [S_{AB}^3] \\ [S_{BA}^3] & [S_{BA}^3] & [S_{BB}^3 + S_{AA}^4] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

式(20),(21)を連立に解けば所要の未知変形量が定まり、さらに式(17)より各節点に働く不静定力が算定される。次に式(20)を用いて図-4 に示す連続4スパンの折板の解析を行い、図-4 の実線で示されるたわみ変形図をえた。

4. 結び 空間に設置した基準面(例えば水平面)に対し任意の角度で傾斜し、かつ任意境界条件を有する単一矩形板の変形法公式を一般的に導いた。その際、簡単な行列の積算によって稜ごとの各種拘束条件を自動的に排除しうる拘束行列を導入して、本公式の一般性を一層高めようよう工夫した。これを用うれば図-2 や図-3 のごとき一方向連続折板の解析が可能となり、ひいては円筒Shell構造を解くこともでき、これらについては逐次発表の予定である。

(参考文献)

- (1) Ehlbers: Die Spannungsvermittlung in Flächentragwerkern, Beton und Eisen, 1930
- (2) Song-Lup Lee, Victor A. Pulmano, T.J. Lin: Ribless Gabled Plates, Proc of the A.S.C.E. Vol. 91 No. 1, February 1965
- (3) O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheung: The Finite Element Method in Structural & Continuum Mechanics, 1967
- (4) R.F. Schaboy, P.D. Sillcock: Bounding Plane Stress Solutions by Finite Elements, Proc of the A.S.C.E. vol. 92, February 1966