

九州大学 正員 山崎徳也

学生員 後藤恵之輔

学生員 久保伸一

1.序 薄板構造物の構成要素として使用される矩形板の座屈荷重は土木、建築、機械、航空、造船等諸分野の構造設計において極めて重要なファクターであり、圧縮力、せん断力、面内曲げモーメントあるいはこれらの合成力等を受ける多くの場合について算定解析されているが、局部的等分布荷重を受ける場合(図-1参照)についてはあまり研究されておらず、わずかにK. Girkmann¹⁾、L. Zetlin²⁾およびR.N. White & W.S. Cottingham³⁾の研究があるに過ぎない。これらのうち文献3)がもっとも実用的であるが、解を階差法によ、て求めてゐるゆゑその精度に問題があるようである。そこで本問題を始めとして未解決の板座屈問題を最近高速電子計算機の発達とともに各分野で急速に応用されつつある有限要素法(Finite Element Method)を用いて解析することも興味あることである。

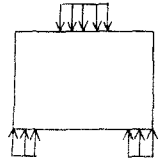


図-1

有限要素法による薄板の座屈安定問題に関する研究としては、K.K. Kapur & B.J. Hertz⁴⁾のそれかとも代表的で多くの工学上重要な基礎的な荷重場を考慮しているが、たゞのみ仮定が煩雑な、R.J. Meloshの式⁵⁾によ、ており工学者にとり理解しやすいと思われるO.C. Zienkiewiczの式⁶⁾によ、てはいない。これに対し梶田 & 成岡⁷⁾は後者の手法で stability coefficient matrix を誘導し座屈荷重を求めているが、matrix の誘導および計算例がわずかに一例に過ぎず実際面への応用に欠けている。

本論は以上のことを踏まえて表題にかかげる問題をZienkiewiczの有限要素法を用いて解析し、たゞ、形状比を変数とした座屈荷重を算定して文献3)の結果と比較検討したものである。なお解析に微小、たゞみ理論に関する通常の仮定を適用し、板材料は等方性で弾性限界内にあるものとして、境界条件は(i)四辺単純支持(ii)四辺固定の場合を考えることとする。

2.座屈荷重算定法

2-1 座屈条件式の誘導

2-1-1 歪みエネルギー 有限要素法により構造物を解析す。

る場合には、対象物を有限個数の要素に分割し各要素はその節点において互いに結合されていると仮定するが、本論ではこの要素として矩形要素を用うることとする。すなわち図-2に示すごとく1, 2, 3, 4を節点とする典型要素Nを考え、各

式(2)の U_N と式(1)とを用いて N 番目の要素の平衡方程式は次のようになる。 $F_N = K_N U_N$ --- (6)

ここに K_N は (12×12) の matrix で "generalized force と generalized displacement との関係を与える要素の stiffness matrix" であり、歪みエネルギーの式より誘導されるものである。

要素の任意点の内力モーメントは板理論より既知の式によって曲率と関係づけられているが、この関係は異方性材料で次式のごとく与えられる。

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \text{ --- (7)}$$

(かかる $\mathcal{B}$ は式(3)の列ベクトル A を用いて次のごとく表わしうるゆえ $\mathcal{B} = B A^T - B C^{-1} U_N$ --- (9))

内力モーメントは結局、次のごとくなる。 $M = D B C^{-1} U_N$ --- (10)

ここに B は (3×12) の matrix で D は材料定数よりなる (3×3) の matrix であり、等方性材料では

$D_{11} = D_{22} = D$, $D_{12} = \nu D$, $D_{33} = (1-\nu)D/2$ となる (ここに $D = E t^3 / 12(1-\nu^2)$, E : ヤング率, t : 板厚, ν : ポアソン比)。

一方、歪みエネルギー (V) は周知のごとく次式で与えられる。 $V = \frac{1}{2} \iint M^T \mathcal{B} dx dy$ --- (11)

ここに積分は要素全体にわたって行うものである。式(9)および式(10)を式(11)に代入し整理すれば所要歪みエネルギーが次のごとく決定せられることとなる。

$$V = \frac{1}{2} U_N^T K_N U_N \text{ --- (12)}$$

ここに $K_N = (C^T)^T \left\{ \iint B^T D B dx dy \right\} C^{-1}$ --- (13) は次式

で与えられる Biot-Savart のたわみ関数を用いて文献(6)の appendix に示すごとく表わされる。

$$w = A_1 + A_2 x + A_3 y + A_4 x^2 + A_5 x y + A_6 y^2 + A_7 x^3 + A_8 x^2 y + A_9 x y^2 + A_{10} y^3 + A_{11} x^3 y + A_{12} x y^3 \text{ --- (14)}$$

2-1-2 Work done 板の中立面に作用する応力 σ_x , σ_y , τ_{xy} による仕事、すなわち Work done

したがって対象とする板の面内荷重分布が決定すれば、式(25)より所要の座屈荷重が算定されることとなる。

2-2 Stability coefficient matrix の誘導

図-1に示す均一な荷重をうける板に有限要素法を適用するには荷重を図-4に示すごとく2つの荷重場に分解し、y方向の一樣な圧縮応力状態[図-5(a)]とx方向に一樣に変化する応力状態[図-5(b)]とについて stability coefficient matrix を求めておかなければならない。

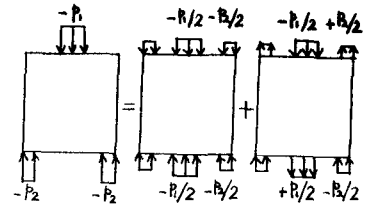


図-4

2-2-1 y方向の一樣な圧縮応力状態に対する

stability coefficient matrix

かかる応力状態に対する stress matrix Σ は次のごとく表わされる。 $\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sigma \end{bmatrix}$ ----- (26)

また式(14)より C および G がそれぞれ次のごとく決定せられる。

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & p' & 0 & 0 & p^2 & 0 & 0 & 0 & p^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2p' & 0 & 0 & 0 & -3p^2 & 0 & 0 \\ 0 & p' & 0 & 0 & p^2 & 0 & 0 & 0 & p^3 & 0 & 0 & p^4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & p' & 0 & 2p' & 0 & 0 & 3p' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & p' & 1 & p' & p^2 & 1 & p' & p^2 & p^3 & p' & p^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2p' & 0 & -1 & -2p' & -3p^2 & -1 & -3p^2 \\ 0 & p' & 0 & 2p' & p^2 & 0 & 3p' & 2p^2 & p^3 & 0 & 3p^2 & p^4 \end{bmatrix}$$

----- (27)

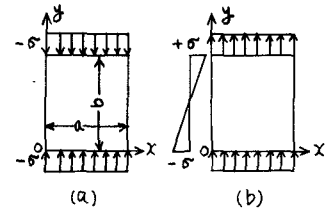


図-5

$$G = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy$$

ので、第4列以下の元とは図-8に示すとき関係にある。

k_{11}'	k_{21}'	k_{31}'	k_{41}'	k_{51}'	k_{61}'	k_{71}'	k_{81}'	k_{91}'	k_{101}'	k_{111}'	k_{121}'	k_{131}'	k_{141}'	k_{151}'	k_{161}'	k_{171}'	k_{181}'	k_{191}'	k_{201}'	k_{211}'	k_{221}'	k_{231}'	k_{241}'	k_{251}'	k_{261}'	k_{271}'	k_{281}'	k_{291}'	k_{301}'	k_{311}'	k_{321}'	k_{331}'	k_{341}'	k_{351}'	k_{361}'	k_{371}'	k_{381}'	k_{391}'	k_{401}'	k_{411}'	k_{421}'	k_{431}'	k_{441}'	k_{451}'	k_{461}'	k_{471}'	k_{481}'	k_{491}'	k_{501}'	k_{511}'	k_{521}'	k_{531}'	k_{541}'	k_{551}'	k_{561}'	k_{571}'	k_{581}'	k_{591}'	k_{601}'	k_{611}'	k_{621}'	k_{631}'	k_{641}'	k_{651}'	k_{661}'	k_{671}'	k_{681}'	k_{691}'	k_{701}'	k_{711}'	k_{721}'	k_{731}'	k_{741}'	k_{751}'	k_{761}'	k_{771}'	k_{781}'	k_{791}'	k_{801}'	k_{811}'	k_{821}'	k_{831}'	k_{841}'	k_{851}'	k_{861}'	k_{871}'	k_{881}'	k_{891}'	k_{901}'	k_{911}'	k_{921}'	k_{931}'	k_{941}'	k_{951}'	k_{961}'	k_{971}'	k_{981}'	k_{991}'	k_{1001}'	k_{1011}'	k_{1021}'	k_{1031}'	k_{1041}'	k_{1051}'	k_{1061}'	k_{1071}'	k_{1081}'	k_{1091}'	k_{1101}'	k_{1111}'	k_{1121}'	k_{1131}'	k_{1141}'	k_{1151}'	k_{1161}'	k_{1171}'	k_{1181}'	k_{1191}'	k_{1201}'	k_{1211}'	k_{1221}'	k_{1231}'	k_{1241}'	k_{1251}'	k_{1261}'	k_{1271}'	k_{1281}'	k_{1291}'	k_{1301}'	
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	--