

# I-13 局部的等分布荷重を受ける矩形板の安定 —有限要素法による解法—

九州大学 正員 山崎徳也

「 学生員 後藤恵之輔

「 学生員 久保伸一

1.序 薄板構造物の構成要素として使用される矩形板の座屈荷重は土木、建築、機械、航空、造船等諸分野の構造設計において極めて重要なファクターであり、圧縮力、せん断力、面内曲げモーメントあるいはこれらが合成せらる多くの場合について算定解析されているが、局部的等分布荷重を受ける場合(図-1参照)についてはあまり研究されておらず、わずかに K.Girkmann<sup>1)</sup>、L.Zetlin<sup>2)</sup>および R.N.White & W.S.Cottingham<sup>3)</sup>の研究があるに過ぎない。これらうち文献3)が最も実用的であるが、解を階差法により求めているゆえその精度に問題があるようである。そこで本問題を始めとして未解決の板座屈問題を最近高速電子計算機の発達とともに各分野で急速に応用されつつある有限要素法(Finite Element Method)を用いて解析することも興味あることである。

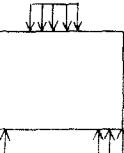


図-1

有限要素法による薄板の座屈安定問題に関する研究としては、K.K.Kapur & B.J.Hartig<sup>4)</sup>のそれからとも代表的で多くの工学上重要な基礎的な荷重場を考慮しているが、たゞみの仮定が煩雑な、R.J.Meloshの式<sup>5)</sup>によっており工学者にとり理解しやすいくと思われる O.C.Zienkiewicz の式<sup>6)</sup>によればいい。これに対し榎田・成田<sup>7)</sup>は後者の手法で stability coefficient matrix を誘導し座屈荷重を求めているが、matrix の誘導および計算例がわざか一例に過ぎず実際面への応用に欠けている。

本論は以上のことを踏まえて表題にかかる問題を Zienkiewicz の有限要素法を用いて解析し、また、形状比を変数として座屈荷重を算定して文献3)の結果と比較検討したものである。なお解析には微小たわみ理論に関する通常の仮定を適用し、板材料は等方性で弾性限界内にあるものとして、境界条件は(i)四辺単純支持(ii)四辺固定の場合を考えることとする。

## 2.座屈荷重算定法

### 2-1 座屈条件式の誘導

2-1-1 並みエネルギー 有限要素法により構造物を解析す。

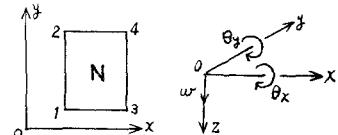


図-2 図-3

この場合には、対象物を有限個数の要素に分割し各要素はその節点において互いに結合されていりと仮定するが、本論ではこの要素として矩形要素を用うることとする。すなわち図-2に示すとく1, 2, 3, 4を節点とする典型要素Nを考え、各節点にはそれぞれ独立な3個の generalized displacement component が存在すると仮定すれば、 $i$ 番目の節点の generalized displacement ( $U_i$ ) は次式で与えられるゆえ  $U_i = \{w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}\}^T \dots \dots (1)$  ここで  $\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y}$ ,  $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$  (図-3参照)

要素全体の generalized displacement ( $U_N$ ) は次のとくなる。 $U_N = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}^T \dots \dots (2)$  また式(1)を参照して  $U_N$  は次のとく表わしうる。 $U_N = CA \dots \dots (3)$  ここで A は定数項よりなる列ベクトル。

同様に各節点には上記変位に対応して3つの成分よりなる generalized force ( $F_i$ ) が存在すると仮定しこれを次式で与えらることオホは  $F_i = \{P_i, M_{xi}, M_{yi}\}^T \dots \dots (4)$

要素全体の generalized force ( $F_N$ ) は次式のことと表わしうる。 $F_N = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}^T \dots \dots (5)$

式(2)の  $U_N$  と式(6)とを用いて  $N$  番目の要素の平衡方程式は次のようになる。  $F_N = K_N U_N \dots \text{---}(6)$

ここで  $K_N$  は  $(12 \times 12)$  の matrix で "generalized force" と "generalized displacement" との関係を与える要素の stiffness matrix であり、歪みエネルギー式より該当されるものである。

要素の任意点の内カモーメントは板理論より既知の式にによって曲率と関係づけられてからか、この関係は異方性材料で次式の式とくえられる。 $\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \dots \text{---}(7)$  あるのは  $M = D \cdot Z \dots \text{---}(8)$

したがって  $Z$  は式(3)の列ベクトル  $A$  を用いて次のようにとく表わすと元  $Z = BA^{-1} - BC^{-1}U_N \dots \text{---}(9)$  内カモーメントは結局、次の式とくなる。  $M = DBC^{-1}U_N \dots \text{---}(10)$

ここに  $D$  は  $(3 \times 12)$  の matrix で  $D$  は材料定数よりなる  $(3 \times 3)$  の matrix であり、等方性材料では  $D_{11} = D_{12} = D$ ,  $D_{12} = \nu D$ ,  $D_{33} = (1-\nu)D/l$  となる ( $\nu$ : 周知の式とく次式で与えられる。  $\nu = E\kappa^3/(12(1-\kappa^2))$ ,  $E$ : キング率,  $\kappa$ : 板厚,  $\nu$ : ポアソン比)。一方、歪みエネルギー ( $V$ ) は周知の式とく次式で与えられる。  $V = \frac{1}{2} \iint M^T Z dx dy \dots \text{---}(11)$  ここに積分は要素全体にわたって行うものである。式(9)および式(10)を式(11)に代入し整理すれば所要の歪みエネルギーが次の式とく決定せられることとなる。

$V = \frac{1}{2} U_N^T K_N U_N \dots \text{---}(12)$  ここに  $K_N = (C^{-1})^T \iint B^T D B dx dy + C^T \dots \text{---}(13)$  は次式で与えられる Zienkiewicz のたわみ函数を用いて文献 6 の appendix に示すとく表わされる。

$$W = A_1 + A_2x + A_3y + A_4x^2 + A_5xy + A_6y^2 + A_7x^3 + A_8x^2y + A_9xy^2 + A_{10}y^3 + A_{11}x^3y + A_{12}x^2y^2 \dots \text{---}(14)$$

2-1-2 Work done 板の中立面に作用する応力  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  による仕事、すなわち Work done ( $T$ ) は周知の式とく次式で与えられる。  $T = \frac{1}{2} \iint [ \sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2\tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 ] dx dy \dots \text{---}(15)$

これを matrix 表示すれば次の式とくなる。  $T = \frac{1}{2} \iint \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} dx dy \dots \text{---}(16)$

したがって次式で与えられる matrix を用いて

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \dots \text{---}(17) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = G^T C^{-1} U_N \dots \text{---}(18)$$

(stress matrix と名付ける)

所要の Work done  $T$  が次の式とく決定せられることとなる。

$$T = \frac{1}{2} U_N^T K_N U_N \dots \text{---}(19) \quad \text{ここに } K_N = t \iint (C^{-1})^T G^T \Sigma G C^T dx dy \dots \text{---}(20)$$

は応力  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  に対する要素の stability coefficient matrix である。

2-1-3 座屈条件式 要素  $N$  の全ポテンシャルエネルギー ( $\Pi$ ) は式(12)と式(19)とを加えて次の式とく与えられる。  $\Pi = \frac{1}{2} U_N^T [K_N + K'_N] U_N \dots \text{---}(21)$

したがって式(6)に応する平衡方程式は要素  $N$  について次の式とく表わされる。  $F_N = [K_N + K'_N] U_N \dots \text{---}(22)$  この平衡方程式は対象とする板全体では次式とくくなる。  $F = [K + K'] U \dots \text{---}(23)$

ここに  $K$ ,  $K'$  はそれを板全体に対する final stiffness matrix および final stability coefficient matrix で  $F$ ,  $U$  はそれを板全体に対する total generalized force および total generalized displacement である。

座屈の際には次式が成立する。  $[K + K'] U = 0 \dots \text{---}(24)$

上式が  $U = 0$  以外の有限な解をもつたためには次行列式すなわち座屈条件式が成立しなければならぬ。 $|K + K'| = 0 \dots \text{---}(25)$

したがって対象とする板の面内荷重分布が決定すれば、式(25)より所要の座屈荷重が算定される：となる。

## 2-2 Stability coefficient matrix の説明

図-4に示す二点支持された板に有限要素法を適用するには荷重を図-4に示すとく2つの荷重場に分解し、 $\pm$ 方向の一様な圧縮応力状態[図-5(a)]と $\pm$ 方向に一様に変化する応力状態[図-5(b)]とについて stability coefficient matrix を求めておかねばならない。

### 2-2-1 $\pm$ 方向の一様な圧縮応力状態に対する

#### stability coefficient matrix

かかる応力状態に対する stress matrix  $\Sigma$  は次のように表わされる。  $\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sigma \end{bmatrix}$  ----- (26)

また式(4)より  $C$  および  $G$  がそれぞれ次のとく決定せられる。

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & P' & 0 & 0 & P^2 & 0 & 0 & 0 & P^3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2P' & 0 & 0 & 0 & -3P^2 & 0 \\ 0 & P' & 0 & 0 & P^2 & 0 & 0 & 0 & P^3 & 0 & P^4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P' & 0 & 2P' & 0 & 0 & 3P' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & P' & 1 & P^2 & 1 & P' & P^2 & P^3 & P' & P^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2P' & 0 & -1 & -2P^2 & -3P^2 & -3P^2 \\ 0 & P' & 0 & 2P' & P^2 & 0 & 3P' & 2P^2 & P^3 & 0 & 3P^2 & P^4 \end{bmatrix} ----- (27)$$

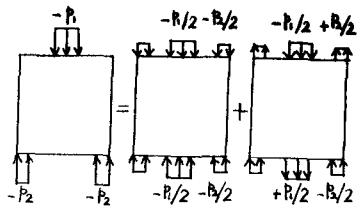


図-4

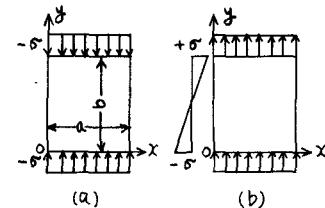


図-5

$$G = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2\bar{x} & 0 & 3\bar{x}^2 & 2\bar{x}\bar{y} & \bar{y}^2 & 0 & 3\bar{x}\bar{y} & \bar{y}^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\bar{x} & 0 & \bar{x}^2 & 2\bar{x}\bar{y} & 3\bar{y}^2 & \bar{x}^3 & 3\bar{x}\bar{y}^2 \end{bmatrix} ----- (28)$$

ただし  $\bar{x} = x/a$ ,  $\bar{y} = y/a$ ,  $P' = b/a$

したがって式(26), 式(27)および式(28)を式(20)に代入計算すれば所要の stability coefficient matrix が図-6のとく求められる：となる。ただし  $P = a/b$  とする。

### 2-2-2 $\pm$ 方向に一様に変化する応力状態に対する stability coefficient matrix

かかる応力状態に対する stress matrix  $\Sigma$  は次のとく表わされる。  $\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(1-\frac{2\bar{x}}{P}) \end{bmatrix}$  ----- (29)

2-2-1 と同様にして所要の stability coefficient matrix が図-7のとく求められる。ただし  $P = a/b$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \frac{-\sigma a}{1260} \begin{bmatrix} 56P^4 \\ 0 & 12P^3 \\ -42 & 66P^2 & 552P \\ -14P^4 & 0 & -42 \\ 0 & -12P^3 & -66P^2 \\ 42 & -66P^2 & -54P \\ 28P^4 & 0 & -21 \\ 0 & -9P^3 & -39P^2 \\ -21 & 39P^2 & 204P \\ -7P^4 & 0 & -21 \\ 0 & 9P^3 & 39P^2 \\ 21 & -39P^2 & -204P \end{bmatrix}$$

図-6

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \frac{-\sigma a}{1260} \begin{bmatrix} -28P^4 \\ -10.5P & 0 \\ -45.5 & 0 & 0 \\ 0 & -10.5P & -45.5 \\ -10.5P & 0 & 0 \\ -45.5 & 0 & 0 \\ -14P^4 & -7P & -17.5 \\ 7P & 0 & 0 \\ -17.5 & 0 & 0 \\ 0 & -7P & -17.5 \\ 7P & 0 & 0 \\ -17.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

図-7

ここの図-6、図-7は Zienkiewicz の stiffness matrix における UU の配置に対応すべく調整したもの

ので、第4列以下の元と図-8に示すとき関係にある。

$$\begin{array}{c}
 k_{11}' \\
 k_{21}' \quad k_{22}' \\
 k_{31}' \quad k_{32}' \quad k_{33}' \\
 k_{41}' \quad k_{42}' \quad k_{43}' \quad k_{11}' \\
 \text{symmetrical} \\
 k_{51}' \quad k_{52}' \quad k_{53}' \quad k_{21}' \quad k_{22}' \\
 k_{61}' \quad k_{62}' \quad k_{63}' \quad k_{31}' \quad k_{32}' \quad k_{33}' \\
 k_{71}' \quad k_{72}' \quad k_{73}' \quad k_{101}' \quad -k_{102}' \quad k_{103}' \quad k_{11}' \\
 k_{81}' \quad k_{82}' \quad k_{83}' \quad -k_{111}' \quad k_{112}' \quad k_{113}' \quad k_{21}' \quad k_{22}' \\
 k_{91}' \quad k_{92}' \quad k_{93}' \quad -k_{21}' \quad k_{22}' \quad k_{31}' \quad -k_{32}' \quad k_{33}' \\
 k_{101}' \quad k_{102}' \quad k_{103}' \quad k_{111}' \quad -k_{112}' \quad k_{113}' \quad k_{21}' \quad k_{22}' \\
 k_{111}' \quad k_{112}' \quad k_{113}' \quad -k_{21}' \quad k_{22}' \quad k_{31}' \quad -k_{32}' \quad k_{33}' \\
 b_{121}' \quad k_{122}' \quad k_{123}' \quad k_{21}' \quad k_{22}' \quad k_{31}' \quad k_{32}' \quad k_{33}' \\
 \end{array}$$

図-8

3. 計算例 本法の結果を文献3)と比較するため、文献3)で取扱われた数種の Loading case について座屈荷重を算定し、板の形状比( $h/l$ )を変数として図-9に示す。図中板軸の剛性次式が与えられるものであり S.S. は四辺単純支持を、Fixed は四辺固定をそれぞれ表わすものとする。

$$C_{cr} = h \frac{\pi^2 D}{l^2 E} \quad \dots \dots \dots \quad (30)$$

おまけに A.3 とある。

本法の精度についてはすでに文献4)と6)とにおいて味があるとあるが、この結果をそのまま本問題に適用しないことは勿論であり、また、本問題に関しては厳密解が未だ見当らないゆえ、Loading Case A, Dに対し、分割数を変えて座屈荷重俢数を算定しその収れん度を調べて本法の本問題に対する精度の吟味とした。 $h/l=1$  の時を表-1に示す。

4 結語 本論は外力として板中央部に等分布圧縮荷重が作用し、反力として下縁両端部に等分布する圧縮力が作用する場合について、四辺単純支持および固定の条件のもとに、座屈荷重を数種の Loading case に対して板の形状比を変数として求めて White の結果と比較したものである。他の境界条件の場合に付しても同様の手法を行えばよくこれが付けては逐次発表の予定である。

文献4) K. Girkemann, International Association for Bridge and Structural Engineering, 1936.

2) L. Zettlin, Proc. Pap. 245, ASCE, Vol 81, Sept. 1955.

3) R.N. White & W.S. Coltham, Proc. Paper 3297, ASCE, Vol 82 No. EM5, Oct. 1962.

4) K.K. Kapur & B.J. Hartz, Proc. Paper 4790, ASCE, Vol 92, No. EM2, Apr. 1966.

5) R.J. Melash, Amer Inst Aero Astro, Vol 3, Jun. 1965.

6) O.C. Zienkiewicz & Y.K. Chenng, Proc Inst. Engrs Vol. 28, Aug. 1964.

7) 桜田 & 成樹, 土木学会誌, Vol. 52, No. 5, May 1967.

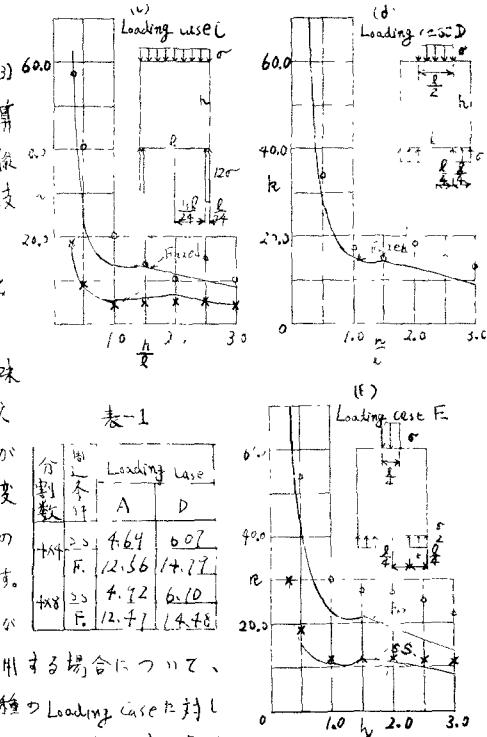
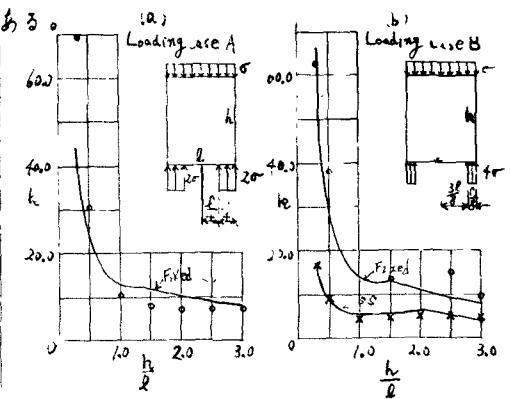


表-1

分 割 数	合 計	Loading case	
		A	D
20	20	4.64	6.07
40	40	12.56	17.77
60	60	4.72	6.10
80	80	12.47	17.48

図-9 (○は White らによる値)  
○: I and ×: SS