

九州大学 正員 山崎徳也

〃 学生員 石川信隆

〃 〃 〃 松隈秀信

## 1. 緒言

屋根型骨組構造物に対する既往の塑性設計法<sup>(1,2,3)</sup>では、風荷重および雪荷重を固定荷重に換算しているが、実際にはこれら荷重を変動くり返し荷重として取扱うべきであり、かかる荷重による崩壊現象を解明する必要がある。本研究は上記観点より、まず曲げと軸力を同時に考慮した降伏条件式<sup>(3)</sup>を用いて、変動くり返し荷重を受ける山形ラーメンの変形硬化荷重ならびに交替塑性荷重を求め、次にこれら荷重と塑性設計法にいう崩壊荷重とを比較検討するとともに、軸力の3種荷重に与える影響を考察し、さらに最小重量設計法を用いて経済的な変断面を決定せしめようとするものである。

## 2. 山形ラーメンの崩壊

図-1に示すごとき矩形等断面をもつ山形ラーメンに2個の鉛直荷重  $P$  および水平荷重  $Q(=P/2)$  が作用する場合について、曲げと軸力を同時に考慮した降伏条件式による崩壊荷重、変形硬化荷重および交替塑性荷重の算定手法を解説すれば以下のごとくである。

## (1) 崩壊荷重の算定

まず図-1のA端の曲げモーメント  $M_A$ 、水平反力  $H_A$  および垂直反力  $V_A$  を未知量に選べば、A, B, C, D, E, F, G 点の曲げモーメントおよび AB, BC, CD, DE, EF, FG 部材の軸力はそれぞれ次式のごとく表わされる。

$$\begin{aligned}
 M_A &= M_A, & N_{AB} &= V_A \\
 M_B &= M_A + 2H_A L, & V_{BC} &= (1/2 P - H_A) \cos \theta + V_A \sin \theta \\
 M_C &= M_A + 5/2 H_A L + 2V_A L - 3/4 PL, & N_{CD} &= (1/2 P - H_A) \sin \theta - (P - V_A) \cos \theta \\
 M_D &= M_A + 3H_A L + 2V_A L - 3/2 PL, & V_{DE} &= (1/2 P - H_A) \cos \theta + (P - V_A) \sin \theta \\
 M_E &= M_A + 5/2 H_A L + 3V_A L - 9/4 PL, & N_{EF} &= (1/2 P - H_A) \sin \theta + (2P - V_A) \cos \theta \\
 M_F &= M_A + 2H_A L + 4V_A L - PL, & N_{FG} &= 2P - V_A \\
 M_G &= M_A + 4V_A L - 3PL, & & 
 \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、曲げモーメントは内側引張を正、軸力は正圧力を正とする。

つぎにこの崩壊形式は図-2に示すごとき4個の基本崩壊形式をも含めて24個考えられるが、ここでは Heyman の方法により其の崩壊形式を図-3(a)のごとく見出せば、図-3(a)のA, C, F, G 点の曲げモーメントおよび軸力は次の曲げと軸力を同時に考慮した降伏条件式をそれぞれ同時に満足することとなる。

$$|M|/M_p + (N/N_y)^2 = 1 \quad (2)$$

ただし  $M_p$ : 塑性曲げモーメント,  $N_y$ : 軸力のみによる全断面降伏力

式(2)に式(1)の  $M_A, M_B, M_C, M_D, M_E, M_F, M_G$  および  $N_{AB}, N_{BC}, N_{CD}, N_{DE}, N_{EF}, N_{FG}$  を代入すれば

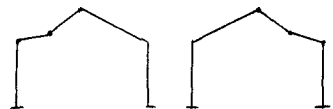
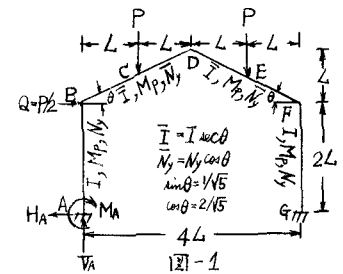


図-2

ば、次のとき4元連立2次方程式かえられる。

A 点で

$$-M_A + V_A^2 = 1$$

C 点で  $N_C \geq N_{Co}$  :

$$M_A + 5/2 \beta H_A + \beta V_A - \beta/4 R_C + \{1/2 R_C - H_A + V_A \tan \theta\}^2 = 1$$

$N_C > N_{Co}$  :

$$M_A + 5/2 \beta H_A + \beta V_A - \beta/4 R_C + \{1/2 R_C - H_A - (R_C - V_A) \tan \theta\}^2 = 1$$

F 点で  $N_F \geq N_{Fo}$  :

$$-M_A - 2\beta H_A - 4\beta V_A + 4\beta R_C + \{1/2 R_C - H_A + 2R_C - V_A \tan \theta\}^2 = 1$$

$N_F > N_{Fo}$  :

$$-M_A - 2\beta H_A - 4\beta V_A + 4\beta R_C + 2R_C - V_A^2 = 1$$

G 点で

$$M_A + 4\beta V_A - 3\beta R_C + (2R_C - V_A)^2 = 1$$

ただし  $M_A = M_A/M_p$ ,  $H_A = H_A/N_y$ ,  $V_A = V_A/N_y$ ,  $R_C = R_C/N_y$ ,  $\beta = N_y/L/M_p = 4/Lh$

h: 柱の断面高さ

よって式(3)を連立に解けば未知量  $M_A, H_A, V_A$  および所要の崩壊荷重  $R_C$  がえら

れることとなり、さらに軸力無視の場合の  $R_C$  を求めるには、式(2)で  $N = 0$  において式(3)で2条の項を全て省略して解けばよいこととなる。

## (2) 変形硬化荷重の算定

図-1のラーメンに鉛直荷重  $P$  および水平荷重  $Q$  が  $Q/P = W$  および  $Q = Q_0/2$  ( $W$ : 一定の荷重値) の範囲内で変動し繰り返し作用するものとすれば、塑性変形が起、た後に弾性可能な応答を示すいわゆる *Shake-down* するときの変形硬化荷重は以下のごとく求められる。

まず、 $P$  と  $Q$  とがそれぞれ単独に作用する場合および  $P$  と  $Q$  が同時に作用する場合の固げモーメントおよび軸力を弾性解析より求め、弾性時における最大、最小固げモーメント  $M_{max}^E, M_{min}^E$  およびこれらに対応する軸力  $N^E$  を選べば表-1がえられる。

表-1

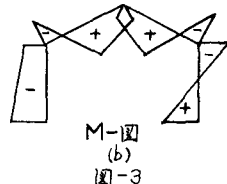
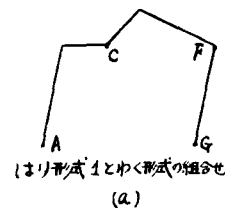
| P           | Q     | $M_A^E$ | $M_B^E$  | $M_C^E$ | $M_D^E$ | $M_E^E$ | $M_F^E$  | $M_G^E$ | $N_{Ao}^E$ | $N_{Bc}^E$ | $N_{Co}^E$ | $N_{De}^E$ | $N_{Fe}^E$ | $N_{Go}^E$ |
|-------------|-------|---------|----------|---------|---------|---------|----------|---------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| W           | 0     | 0.357WL | -0.480WL | 0.311WL | 0.102WL | 0.311WL | -0.480WL | 0.357WL | 1.000W     | 0.822W     | 0.374W     | 0.374W     | 0.822W     | 1.000W     |
| 0           | W/2   | -0.380W | 0.269W   | 0.087W  | -0.095W | -0.100W | -0.106W  | 0.245W  | -0.094W    | 0.115W     | 0.115W     | 0.199W     | 0.199W     | 0.094W     |
| W           | W/2   | -0.023W | -0.211W  | 0.398W  | 0.009W  | 0.211W  | -0.586W  | 0.602W  | 0.906W     | 0.937W     | 0.489W     | 0.573W     | 1.021W     | 1.094W     |
| $M_{max}^E$ | $N^E$ | 0.357W  | 0.269W   | 0.398W  | 0.102W  | 0.311W  | 0        | 0.602W  | 1.000W     | 0.937W     | 0.489W     | 0.374W     | 0          | 1.094W     |
| $M_{min}^E$ | $N^E$ | -0.380W | -0.480W  | 0       | -0.095W | -0.100W | -0.586W  | 0       | -0.094W    | 0.822W     | 0          | 0.199W     | 1.021W     | 0          |

一方、塑性変形により図-1のA点に残留固げモーメント  $M_A^R$ , 残留水平反力  $H_A^R$ , 残留垂直反力  $V_A^R$  が生ずるものとすれば、同図の各点における残留固げモーメント  $M^R$  および各部材の残留軸力  $N^R$  は、式(1)に  $P = 0, M_A = M_A^R, H_A = H_A^R, V_A = V_A^R$  を代入した値に合致する。したがって各点の実際の固げモーメント  $M_i$  および各部材の実際の軸力  $N_i$  は弾性固げモーメント  $M_i^E$  および軸力  $N_i^E$  と上記  $M_i^R$  および  $N_i^R$  とを加算することによってえられることとなる。すなわち、

$$M_i = M_i^E + M_i^R, \quad N_i = N_i^E + N_i^R \quad (4)$$

次に、変動繰り返し荷重をうける真の崩壊形式を2.1)と同様にHergemanの方法を用いて決定すれば、図-3(a),(b)と全く同じ崩壊形式およびM-図がえられ、A, C, F, G点に塑性ヒンジが形成されていることが分るゆえ、表-1の  $N_{Ao}^E, M_{Ao}^E, M_{Bc}^E, M_{Co}^E$  およびこれらに対する  $N_A^E, N_B^E, N_C^E, N_D^E$  を用うれば、結局実際の固げモーメントおよび軸力  $M_i$  式(4)より次式のごとく表わされる。

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -0.380WL + M_A^R, & N_A &= -0.094W + V_A^R \\ M_C &= 0.398WL + M_C^R + 5/2 H_A^R L + V_A^R, & N_C &= 0.937W - H_A^R \cos \theta + V_A^R \tan \theta \end{aligned} \right\} (5)$$



$$\left. \begin{aligned} M_p &= -0.586 W L + M_A^R + 2 H_A^R L + 4 V_A^R L, & N_{pe} &= 1.021 W - H_A^R \sin \theta - V_A^R \sin \theta \\ M_b &= 0.602 W L + M_A^R + 4 V_A^R L, & N_{pi} &= N_g = 1.094 W - V_A^R \end{aligned} \right\}$$

よって式(5)を式(2)に代入すれば式のごとき4元連立2次方程式がえられ、これをNewtonの逐次近似法によって解けば、所要の変形硬心荷重  $W_b$  がえられることとなる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \text{A 点で} & \quad 0.380 \beta W_b - M_A^R + (-1.094 W_b + V_A^R)^2 = 1 \\ \text{C 点で} & \quad 0.398 \beta W_b + M_A^R + 5.12 \beta H_A^R + 3 \beta V_A^R + (0.937 W_b \sec \theta - H_A^R + V_A^R \tan \theta)^2 = 1 \\ \text{F 点で } N_{pe} \geq N_{pi} : & \quad 0.586 \beta W_b - M_A^R - 2 \beta H_A^R - 4 \beta V_A^R + (1.021 W_b \sec \theta - H_A^R - V_A^R \tan \theta)^2 = 1 \\ N_{pe} > N_{pi} : & \quad 0.586 \beta W_b - M_A^R - 2 \beta H_A^R - 4 \beta V_A^R + (1.094 W_b - V_A^R)^2 = 1 \\ \text{G 点で} & \quad 0.602 \beta W_b + M_A^R + 4 \beta V_A^R + (1.094 W_b - V_A^R)^2 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ただし  $W_b = W_s/N_y$ ,  $M_A^R = M_A^R/M_p$ ,  $H_A^R = H_A^R/N_y$ ,  $V_A^R = V_A^R/N_y$

### (3) 交番塑性荷重の算定

2(2)と同様の変動くり返し荷重が作用するとき、図-1のラーメンのある断面に交番塑性応力が発生し、数百回のくり返して部材が破断するときの荷重、いわゆる交番塑性荷重を求めれば、以下のごとくである。

まず交番塑性による崩壊条件<sup>6)</sup>は次式で与えられる。

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} \geq 2 \sigma_y \quad (7)$$

ただし  $\sigma_{max}$ : ある荷重状態のある断面での最大応力,  $\sigma_{min}$ : 他の荷重状態での同一断面での最小応力,  $\sigma_y$ : 降伏点応力

一方、応力は  $\sigma = M/S \pm N/A$  ( $S$ : 断面係数,  $A$ : 断面積) で与えられるゆえ、図-1の各点での  $\sigma_{max}$  および  $\sigma_{min}$  が表-1の諸値を用いて表-2のごとくえられる。

表-2 (  $h/L = 1/20$  )

|                                          | A       | B       | C       | D      | E       | F        | G       |
|------------------------------------------|---------|---------|---------|--------|---------|----------|---------|
| $\sigma_{max}/\sigma_y$                  | 22.447W | 16.243W | 24.935W | 6.527W | 19.583W | 0        | 37.231W |
| $\sigma_{min}/\sigma_y$                  | -22.911 | -29.778 | 0       | -5.891 | -6.248  | -36.301W | 0       |
| $(\sigma_{max} - \sigma_{min})/\sigma_y$ | 45.360  | 46.021  | 24.935  | 12.418 | 25.831  | 36.301   | 37.231  |
| $W A/L/M_y$                              | 1.764   | 1.738   | 3.208   | 6.442  | 3.097   | 2.204    | 2.148   |

表-2よりB点で  $(\sigma_{max} - \sigma_{min})$  が最大となることから、結局これと式(7)を用いることにより所要の交番塑性荷重  $W_b$  が求められることとなる。

### 3. 計算結果および考察

前記2(1),(2),(3)で誘導した諸式を用いて、崩壊荷重  $P_b$ 、変形硬心荷重  $W_b$  および交番塑性荷重  $W_s$  を電子計算機 OKITAC-5090H により求めれば表-3がえられる。すなわち、

(1) 既往の研究によれば、矩形ラーメンおよび連続はりに対する  $(W_b/P_b) \times 100\%$  は通常 85% 以内にあることが明らかにされているが、本例の山形ラーメンの  $(W_b/P_b) \times 100\%$  は約 86% で、既往の研究結果とほぼ一致していることが認められる。

(2) また矩形ラーメンでは一般に  $W_b$  より  $W_s$  の方が小さく、したがって設計荷重として採用すべきであるが、表-2によれば  $(W_b/P_b) \times 100\%$  は約 76% で、 $W_b$  より  $W_s$  の方が大きく、したがって  $W_s$  を設計

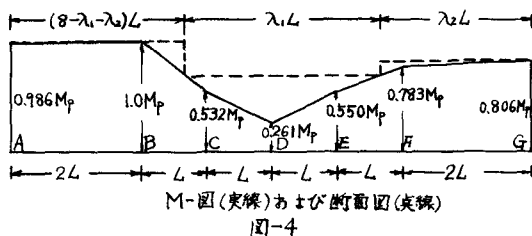
討すべきであり、この傾向はむしろアーチの結果<sup>9)</sup>と一致していることが分る。

(3)軸力の $P_0$ ,  $W_0$ および $W_k$ に与える影響はそれぞれ0.3%, 0.1%および25%といずれも小さく、軸力の影響を無視しても差し支えないことが確認される。

#### 4. 変断面設計法

3.で考察したごとく本例の山形ラーメンでは交番塑性荷重を設計基準とすべきこと、また軸力の影響が小さくこととを判明するゆえ、ここでは表-3の $W_k=1.782 M_p L$ を採用し、これを用いて以下にSattlerの方法<sup>4)</sup>を拡張して変断面設計を行う。

まず、交番塑性崩壊はB点で起るゆえ、同点の曲げモーメントを基準( $M_0=M_p$ )とし、B点以外の曲げモーメントを $\gamma M_p$  ( $\gamma$ =B点の交番塑性荷重/その点の交番塑性荷重)とすれば、図-4の実線のじときM-図がえられる。



つぎに、このM-図を包含するごとく階段状に実線を描き、かかるM-図をもつ断面を考えれば、重量函数 $W_f$ は文献(3)より次式のごとく与えられる。

$$W_f = \Sigma M_p L = \{8 - \lambda_1 - \lambda_2 + \mu \lambda_1 + 0.806 \lambda_2\} M_p L \quad (8)$$

ただし  $\mu M_p$ : 変断面部の塑性曲げモーメント,  $\lambda_1 L, \lambda_2 L$ : 変断面部の長さ

ここで式(8)の $\lambda_1$ および $\lambda_2$ は図-4の幾何学的関係よりそれぞれ $\mu$ の函数として次のごとく求められる。

$$\lambda_1 = 0.46\mu - 1.513, \quad \lambda_2 = 5.361 - 4.292\mu \quad (9)$$

よって未知数は $\mu$ のみとなるゆえ、式(8)に式(9)を代入のうえ、最小重量となる $\mu$ およびそのときの $W_f$ を $dW_f/d\mu = 0$ および式(8)より算出すれば、結局次値がえられることとなる。

$$\mu = 0.563, \quad W_f = 6.5 M_p L \quad (10)$$

すなわち、交番塑性荷重を基準として変断面設計を行えば等断面( $W_k=8.0 M_p L$ )の場合に比し、約19%の重量軽減が可能となることが分る。

#### 5. 結語

本研究によって変動くり返し荷重をうける山形ラーメンの崩壊挙動が解明されることとなったが、同様の手法により円弧部材をもつラーメンの解析も可能となる。さらに、くり返し荷重による弾塑性変形なごびにひずみ硬化の影響を考慮した解析については目下研究中であり、今後逐次発表する予定である。

参考文献 1) J.F.Baker, M.R.Horne and J.Hogman: The Steel Skeleton Vol.2, Cambridge University Press, 1956

2) B.G.Neal: The Plastic Methods of Structural Analysis, Chapman & Hall, London, 1963

3) 本原博: 塑性設計法, 森北出版

4) K.Sattler: Die plastische Berechnung stählerner Biegegesteuerter Systeme mit Stäben veränderlichen Querschnitts, Bauingenieur, 35 (1960) Heft 6.

5) J.Hogman: Automatic Analysis of Steel-Framed Structures under Fixed and Moving Loads, Proc. Inst. Civil Engrs., Jan. 1959

6) 福本・吉田: 変動くり返し荷重によるアーチの崩壊, 土木学会論文集, 第131号, 昭和44年7月