

九州大学 正 員 山崎徳也

正 員 杉坂 熙

学生員 古川恒雄

1. 緒言

斜板(平行四辺形板)の自由振動に関しては、R.Kaul⁽¹⁾、J.H.Angyris⁽²⁾、堀氏⁽³⁾、成岡氏⁽⁴⁾、および著者ら⁽⁵⁾の研究があり既に変断面板(文献(3))、直交異方性板(文献(4)、(5))をも取扱う可能となっているが、これらはすべて単一斜板を対象としたものである。土木構造物における斜板構造はしばしば連続斜スラブ橋、連続斜桁橋の形態で現われるゆえ、かかる構造物の設計を合理的に行うためには、連続斜板構造の静的ならびに動的解析の進歩が望まれる。本研究はさきに著者ら⁽⁶⁾が発表した Finite Element Method による一方向連続斜板の静的解析手法を自由振動解析に拡張応用したもので、任意周辺支持条件の一方向連続斜板の固有周期ならびに振動モードの算定を可能ならしめるものである。

2. 平行四辺形板要素の Stiffness Matrix と Mass Matrix

図-1のごとく、相隣る2辺の長さかそれぞれ a 、 b なる平行四辺形板要素 A (1-2-3-4) の中立面内に斜交軸 x 、 y を、これらと垂直下向きに z 軸を設ける。いまモーメントベクトルは右ねじの法則にしたがうものとし、 xy 平面内で y および x 軸に垂直方向のモーメントをそれぞれ M_θ 、 M_ϕ また z 方向の力を F_z とおけば、板要素の任意節点 i ($i=1, 2, 3, 4$) に作用する外力が次の3次の列ベクトル F_i で表わされる。

$$F_i = \{M_\theta \ M_\phi \ F_z\}_i^T \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

ただし、 l は長さの Dimension を持つ任意量である。

他方、 M_θ 、 M_ϕ に対応する回転成分をそれぞれ $\theta = -\frac{\partial w}{\partial y}$ 、 $\phi = \frac{\partial w}{\partial x}$ 、 z 方向のたわみを w とすれば、 i 点の変形成分は3次の列ベクトル

$$u_i = \{\theta \ \phi \ w\}_i^T \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

で表わされる。ここに $w = w/l$ 。

次に、板要素 A の4節点の外力および変形成分をそれぞれ12次の列ベクトル

$$F^A = \{F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4\}^T \quad (3)$$

$$u^A = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4\}^T \quad (4)$$

にて表わすこととすれば、 (12×12) の Stiffness Matrix K^A を媒介として一般に次式が成立する。

$$F^A = K^A u^A \quad (5)$$

K^A の誘導過程については文献(6)を参照されたい。

さて 本題の自由振動問題を取り扱うためには、先ず平行四辺形板要素全体に分布している慣性力

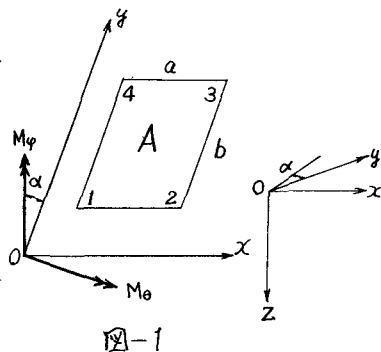


図-1

を12個の要素からなる節点力 F_i^A に置換する必要がある。この置換演算は、矩形板に関して既にO.C. Zienkiewicz⁽⁷⁾が仮想仕事の原理に基づく手法を發表しているが、斜板についても、本論文で斜交座標に対し式(1),(2)のごとく特殊定義された力および変位ベクトルを用いれば容易に F_i^A を求めうる。すなわち、いま板要素Aのためみ w が次式で表わされるものと仮定する。

$$w = \ell \omega$$

$$= \ell \{ A_1 + A_2 \xi + A_3 \eta + A_4 \xi^2 + A_5 \xi \eta + A_6 \eta^2 + A_7 \xi^3 + A_8 \xi^2 \eta + A_9 \xi \eta^2 + A_{10} \eta^3 + A_{11} (\xi^2 \eta + \eta^2 \xi) + A_{12} (\xi \eta^2 + \eta \xi^2) \} \quad (6)$$

ここに $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$ は無次元係数、 $\xi = x/a, \eta = y/b$

$$\nu_1 = \frac{3S_0}{1+2S_0^2} \frac{b}{a}, \quad \nu_2 = \frac{3S_0}{1+2S_0^2} \frac{a}{b}, \quad S_0 = \sin \alpha.$$

式(6)を次のごとく書き換える。

$$w = \ell L A \quad (7)$$

ただし $L = \{ 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi \eta \quad \eta^2 \quad \xi^3 \quad \xi^2 \eta \quad \xi \eta^2 \quad \eta^3 \quad (\xi^2 \eta + \eta^2 \xi) \quad (\xi \eta^2 + \eta \xi^2) \}$

$$A = \{ A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12} \}^T$$

式(7)を用いて式(4)の u^A は次式で表わされる。⁽⁴⁾

$$u^A = C A$$

$$\text{または } A = C^{-1} u^A \quad (8)$$

ここに C は (12×12) の行列である。

式(8)を式(7)に代入すれば、結局次式がえられる。

$$w = \ell L C^{-1} u^A \quad (9)$$

考えている斜板の振動が角振動数 f の単振動であるとするれば、その単位面積当りの慣性力 g は次式で求められる。

$$g = m f^2 w = m \ell f^2 L C^{-1} u^A \quad (10)$$

ただし、 m は板の面密度

いま板要素の4個の節点の仮想変位を $\bar{u}^A$ とすれば、それに対応する板の仮想たわみ $\bar{w}$ は式(9)より次式で与えられる。

$$\bar{w} = \ell L C^{-1} \bar{u}^A \quad (11)$$

板の慣性力 g とその等価節点力 F_i^A に対し、式(11)の変形成分との間で仮想仕事の原理を適用すれば次式が成立する。

$$(\bar{u}^A)^T F_i^A = \cos \alpha \int_0^a \int_0^b \bar{w}^T g \, dx \, dy \quad (12)$$

式(10),(11)を式(12)の右辺に代入して整理すれば次式がえられる。

$$(\bar{u}^A)^T F_i^A = f^2 m \cos \alpha \frac{\ell^4}{\lambda \mu} (\bar{u}^A)^T (C^{-1})^T \left\{ \int_0^1 \int_0^1 L^T L \, d\xi \, d\eta \right\} C^{-1} u^A \quad (13)$$

仮想変位 $\bar{u}^A$ として単位行列を与えれば、 F_i^A が結局次式で求められることとなる。

$$F_i^A = f^2 M^A u^A \quad (14)$$

$$\text{ただし } M^A = \frac{\ell^4}{\lambda \mu} m \cos \alpha (C^{-1})^T \left\{ \int_0^1 \int_0^1 L^T L \, d\xi \, d\eta \right\} C^{-1} \quad (15)$$

F_i^A は慣性力から置換された節点力で、 M^A は (12×12) のMass Matrixである。

$\lambda = \mu = 1$ として $\alpha = 15^\circ, 30^\circ$ に対する M^A を算定し、結果を表-1, 表-2にまとめて示した。

表-1

表-2

3. 振動数方程式の誘導

図-2 のごとく周辺が任意に支持された連続斜板を例にとり、振動数方程式の誘導過程を説明する。

連続斜板を平行四辺形板要素 $A, B, C, D, \dots$ に分割し、節点番号を $1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n$ と名付ける。1) は節点 i, j, k, l にて構成される要素

を Z とすれば、既に 2 で述べたことと要素 Z に対する *Stiffness Matrix* K^Z と *Mass Matrix* M^Z がそれぞれ次式で求められる。

$$K^Z = \begin{bmatrix} p_{Kii}^Z & & & \\ & p_{Kjj}^Z & & \\ & & p_{Kkk}^Z & \\ & & & p_{Kll}^Z \end{bmatrix} \text{ Symmetric} \quad \text{--- (16)}$$

$$M^Z = \begin{bmatrix} m_{ii}^Z & \text{Symmetric} \\ m_{ji}^Z & m_{ij}^Z \\ m_{zi}^Z & m_{iz}^Z & m_{th}^Z \\ m_{lu}^Z & m_{ul}^Z & m_{tk}^Z & m_{ek}^Z \end{bmatrix} \quad (17)$$

式(16),(17)の k^2, m^2 はすべて (3×3) の小行列である。

慣性力を板に作用する外力と見て、各節点ごとに x, y, z 方向の力の釣合式を立てれば一般に次式がえられる。

$$[K](u) = f^2[M](u) \quad \text{-----} \quad (18)$$

ここに $\{u\}$ は各節点の変形量の列ベクトル、また $[K]$ および $[M]$ はそれぞれ構造全体についての Stiffness Matrix および Mass Matrix で、次の内容をもつ。

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & & & & \\ k_{21} & k_{22} & & & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & & k_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{Symmetric} \quad (9)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2n} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \dots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{Symmetric} \quad (20)$$

式(19), (20)の k, m はすべて (3×3) の小行列であり、式(16) (17)の Stiffness Matrix と Mass Matrix を用いて、次のごとく極めて機械的に求められる。

$$k_{ii} = k_{ii}^A, \quad k_{ii} = k_{ii}^B, \quad k_{i7} = k_{i7}^A, \quad k_{i2} = k_{i2}^B, \quad k_{i12} = k_{i12}^A + k_{i12}^B, \quad \dots \quad k_{i4} = k_{i4}^A + k_{i4}^B, \quad k_{i77} = k_{i77}^A + k_{i77}^B + k_{i77}^B + k_{i77}^B, \dots$$

$$\text{一般に } k_{ij} = \sum_k k_{ij}^k$$

$$m_{ii} = m_{ii}^A, \quad m_{ii} = m_{ii}^B, \quad m_{i7} = m_{i7}^A, \quad m_{i2} = m_{i2}^B, \quad m_{i12} = m_{i12}^A + m_{i12}^B, \quad \dots \quad m_{i4} = m_{i4}^A + m_{i4}^B, \quad m_{i77} = m_{i77}^A + m_{i77}^B + m_{i77}^B + m_{i77}^B, \dots$$

$$\text{一般に } m_{ij} = \sum_k m_{ij}^k$$

なお、連続斜板の中間節線では $\omega = \theta = 0$ 、周辺では、単純支持の場合 $\omega = 0$, $\varphi = 0$ または $\omega = 0$, $\theta = 0$ 、固定の場合 $\omega = \theta = \varphi = 0$ 、などがそれぞれ境界条件として成立するゆえ、これらの境界条件により不要となる変形量に相当する行および列を式(18)の $[K], [M]$ から抜き出し、それぞれの次数を大巾に減少させることができる。

さて、式(18)は次式のごとく変形される。

$$[K - f^2 M] \{u\} = 0 \quad (21)$$

式(21)は未知変形量 $\{u\}$ に関する連立一次同次方程式であり、これがすべては0でない解をもつ条件から、次の振動数方程式がえられる。

$$\text{determinant} |K - f^2 M| = 0 \quad (22)$$

式(22)を満足する f が連続斜板の所要の固有振動数である。

4. 振動モードの算定

式(22)を解いてえられた固有値 f^* を式(21)に代入すれば次の連立一次同次方程式をうる。

$$[K - f^{*2} M] \{u\} = 0 \quad (23)$$

式(23)の未知数 $\{u\}$ の一つを例えば1とおき、式(23)から任意の方程式を1個除いてえられる連立一次方程式を解けば $\{u\}$ の相互の比が求められ、所要の振動モードがえられることとなる。

5. 結語

本研究は任意周辺支持条件をもつ等方性連続斜板構造の自由振動問題に対する実用解析手法として Finite Element Method の適用を提示したものである。本法によれば、予め任意斜角をもつ平行四辺形板要素に対して、例えば表-1, 2のごとき Mass Matrix M^A と文献(6)にて算定した Stiffness Matrix K^A を用意しておくことにより連続斜板構造全体の Mass Matrix 及び Stiffness Matrix を全く機械的に配列でき、電子計算機による高速計算のプロセスに極めて乗せやすいことが一大利点として挙げられる。

参考文献 (1) R. Kaul and V. Cadambe: The Natural Frequencies of Thin Skew Plates, Aero Quart. 7 (1956).

(2) J. H. Argyris: Matrix Displacement Analysis of Plates and Shells, Ing. Arch. XXXV Band (1966).

(3) T. Hanawa, S. Koshide and H. Izumi: On the Natural Vibration of Variable Thickness Cantilever Plates, Proceedings of the Fifteenth Japan National Congress for Applied Mechanics (1965).

(4) 成岡 丈村 中川 山口: 直格子斜材橋の固有振動に関する研究, 土木学会論文集, 第139号 (昭和42年3月).

(5) 山崎 彦坂 古川: 直交異方性斜板の振動解析, 第22回土木学会年次学術講演会講演概要 (昭和42年5月).

(6) 山崎 彦坂: Finite Element Method による一方向連続斜板の解法, 北工学集報 第40巻第5号 (昭和42年11月).

(7) O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung: The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs, Proc. Instn. Civ. Engrs. vol. 28, August (1964).