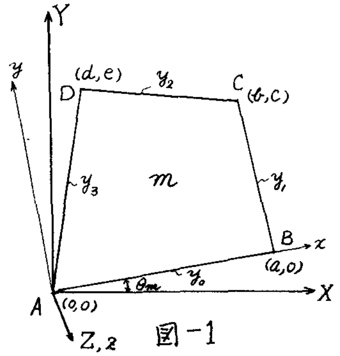
I－8　　有限要素法による有梁板の解析

九州大学　正　員　山崎　徳也
〃　　〃　太田　俊昭
〃　学生員　○馬場先　勝弘

1. 序言　板とはりとで構成される複合構造物は、連続スラブ橋やスラブ式ラーメン橋あるいは多層有梁板形式の構造物として、土木および建築構造分野に広く用いられている。しかし今日のところ、この種構造物の解析に関する研究例は数少ない。したがって、かかる構造物の解析理論の確立は勿論のこと、その力学的諸特性を解明把握することが合理的設計を行なう上で強く要望されることは当然である。そこで著者らは、有限要素法に基づいて任意四辺形板に対するStiffness Matrixを導き、これにはりの要素を導入することによって有梁任意四辺形板に対する変形法公式の誘導を行ない、かつ上記複合構造物の解析の確立を試みた。

2. 任意四辺形板要素およびはり要素のStiffness Matrix　板要素のStiffness Matrixの誘導には、R. J. Melosh, O. C. ZienkiewiczおよびJ. H. Argyrisらの提案した手法があるが、本論文では、O. C. Zienkiewiczが用いた方法[1]を拡張応用して、任意四辺形板要素のStiffness Matrixを求める。すなわち、図-1のごとく $y_0=0$, $y_1=-cx/(a-b)+ca/(a-b)$, $y_2=-(e-c)x/(b-d)+(be-cd)/(b-d)$ および $y_3=ex/d$ の4直線で囲まれる四辺形板要素を考える。



図－1

z軸方向のたわみ w^z を式(1)で定義すれば、x, y軸に関するたわみ角 $\theta^x=-\partial w/\partial y$, $\theta^y=\partial w/\partial x$ はそれぞれ式(2)で与えられる。

$$w^z=w/l_0=[1\ \bar{x}\ \bar{y}\ \bar{x}^2\ \bar{x}\bar{y}\ \bar{y}^2\ \bar{x}^3\ \bar{x}^2\bar{y}\ \bar{x}\bar{y}^2\ \bar{y}^3\ \bar{x}^3\bar{y}\ \bar{x}\bar{y}^3]\times[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_{11}\ \alpha_{12}]^T \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned}\theta^x&=l_0/a\,[0\ 0\ -1\ 0\ -\bar{x}\ -2\bar{y}\ 0\ -\bar{x}^2\ -2\bar{x}\bar{y}\ -3\bar{y}^2\ -\bar{x}^3\ -3\bar{x}\bar{y}^2]\times[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_{11}\ \alpha_{12}]^T\\ \theta^y&=l_0/a\,[0\ 1\ 0\ 2\bar{x}\ \bar{y}\ 0\ 3\bar{x}^2\ 2\bar{x}\bar{y}\ \bar{y}^2\ 0\ 3\bar{x}^2\bar{y}\ \bar{y}^3]\times[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_{11}\ \alpha_{12}]^T\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ただし、$\bar{x}=x/a$, $\bar{y}=y/a$ また肩字Tは転置行列を意味し、l_0は基準長である。

いま、板要素ABCDの任意の頂点 $i\ (i=A,B,C,D)$ の変形成分を3次の列ベクトル $(U_i')=(w_i^z\ \theta_i^x\ \theta_i^y)^T$ で表わし、4つの頂点の変形成分を12次の列ベクトル $(U')=(U_A'\ U_B'\ U_C'\ U_D')^T$ で表示すれば、式(1), (2)の $\bar{x}, \bar{y}$ にそれぞれ各頂点の座標値を代入することにより次式がえられる。

$$(U')=(\mathbb{C})[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\cdots\ \alpha_{11}\ \alpha_{12}]^T \quad \cdots\cdots(3)$$

ここに $(\mathbb{C})$ は12×12の正方行列である（表-1 参照）。

一方、頂点 i の変形成分にそれぞれ対応する同点の z方向の力 $l_0F_i^z$ および x, y軸回りのモーメント M_i^x, M_i^y を同様に一括して3次の列ベクトル $(F_i')=(l_0F_i^z\ M_i^x\ M_i^y)^T$ で、また板の4つの頂点の諸力を同じく12次の列ベクトル $(F')=(F_A'\ F_B'\ F_C'\ F_D')^T$ で一括表示すれば、12×12のStiffness Matrix (K') を媒介として (F') は (U') の線型式として次式で与えられる。すなわち、

$$(F')=D_0(K')(U')+(\mathbb{F}') \quad \cdots\cdots(4)$$

ここに、$(\mathbb{F}')$ は荷重項であり、また (K') は既往の研究[2]により次式で定義される。

$$(K')=(\mathbb{C}^{-1})^T(H)(\mathbb{C}^{-1}) \quad \cdots\cdots(5)$$

[illegible] $(H)=\mu^2\times\iint(B)^T(De)(B)\,d\bar{x}\,d\bar{y}$ ------------------------------------ (6)

ここに、 $(B)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6\bar{x} & -2\bar{y} & 0 & 0 & -6\bar{x}\bar{y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2\bar{x} & -6\bar{y} & 0 & -6\bar{x}\bar{y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4\bar{x} & 4\bar{y} & 0 & 6\bar{x}^2 & 6\bar{y}^2 \end{bmatrix}$, $(De)=\begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$

D_0：板の曲げ剛度、D_x, D_y, D_1, D_{xy}：ポアソン比νによって定まる常数で等方性板の場合にはそれぞれ $1, 1, \nu, (1-\nu)/2$ となる。

また行列(H)の要素H_{ij}は図-1の四辺形板要素に対して次の内容となる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & -\mu & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 2\mu & 0 & 0 & 3\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \bar{b} & \bar{c} & \bar{b}^2 & \bar{b}\bar{c} & \bar{c}^2 & \bar{b}^3 & \bar{b}^2\bar{c} & \bar{b}\bar{c}^2 & \bar{c}^3 & \bar{b}^3\bar{c} & \bar{b}\bar{c}^3 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & -\mu\bar{b} & -2\mu\bar{c} & 0 & -\mu\bar{b}^2 & -2\mu\bar{b}\bar{c} & -3\mu\bar{c}^2 & -\mu\bar{b}^3 & -3\mu\bar{b}\bar{c}^2 \\ 0 & \mu & 0 & 2\mu\bar{b} & \mu\bar{c} & 0 & 3\mu\bar{b}^2 & 2\mu\bar{b}\bar{c} & \mu\bar{c}^2 & 0 & 3\mu\bar{b}^2\bar{c} & \mu\bar{c}^3 \\ 1 & \bar{d} & \bar{e} & \bar{d}^2 & \bar{d}\bar{e} & \bar{e}^2 & \bar{d}^3 & \bar{d}^2\bar{e} & \bar{d}\bar{e}^2 & \bar{e}^3 & \bar{d}^3\bar{e} & \bar{d}\bar{e}^3 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & -\mu\bar{d} & -2\mu\bar{e} & 0 & -\mu\bar{d}^2 & -2\mu\bar{d}\bar{e} & -3\mu\bar{e}^2 & -\mu\bar{d}^3 & -3\mu\bar{d}\bar{e}^2 \\ 0 & \mu & 0 & 2\mu\bar{d} & \mu\bar{e} & 0 & 3\mu\bar{d}^2 & 2\mu\bar{d}\bar{e} & \mu\bar{e}^2 & 0 & 3\mu\bar{d}^2\bar{e} & \mu\bar{e}^3 \end{bmatrix}$$

ただし $\mu=l_0/a$

表 - 1

$H_{ij}=H_{ji}=0$ $(i=1,2,3,\ j=1,2,3,\ \cdots,11,12)$

$H_{44}=4I_cD_x$, $H_{45}=H_{54}=0$, $H_{46}=H_{64}=4I_cD_1$,

$H_{47}=H_{74}=12I_xD_x$, $H_{48}=H_{84}=4I_yD_x$,

$H_{49}=H_{94}=4I_xD_1$, $H_{410}=H_{104}=12I_yD_1$,

$H_{411}=H_{114}=12I_{xy}D_x$, $H_{412}=H_{124}=12I_{xy}D_1$,

$H_{55}=4I_cD_{xy}$, $H_{56}=H_{65}=H_{57}=H_{75}=0$,

$H_{58}=H_{85}=8I_xD_{xy}$, $H_{59}=H_{95}=8I_yD_{xy}$,

$H_{510}=H_{105}=0$, $H_{511}=H_{115}=12I_{x^2}D_{xy}$,

$H_{512}=H_{125}=12I_{y^2}D_{xy}$, $H_{66}=4I_cD_y$,

$H_{67}=H_{76}=12I_xD_1$, $H_{68}=H_{86}=4I_yD_1$,

$H_{69}=H_{96}=4I_xD_y$, $H_{610}=H_{106}=12I_yD_y$,

$H_{611}=H_{116}=12I_{xy}D_1$, $H_{612}=H_{126}=12I_{xy}D_y$, $H_{77}=36I_{x^2}D_x$, $H_{78}=H_{87}=12I_{xy}D_x$, $H_{79}=H_{97}=12I_{x^2}D_1$,

$H_{710}=H_{107}=36I_{xy}D_1$, $H_{711}=H_{117}=36I_{x^2y}D_x$, $H_{712}=H_{127}=36I_{x^2y}D_1$, $H_{88}=4I_{y^2}D_x+16I_{x^2}D_{xy}$,

$H_{89}=H_{98}=4I_{xy}D_1+16I_{xy}D_{xy}$, $H_{810}=H_{108}=12I_{y^2}D_1$, $H_{811}=H_{118}=12I_{xy^2}D_x+24I_{x^3}D_{xy}$, $H_{812}=H_{128}=12I_{xy^2}D_1$ $+24I_{xy^2}D_{xy}$, $H_{99}=4I_{x^2}D_y+16I_{y^2}D_{xy}$, $H_{910}=H_{109}=12I_{xy}D_y$, $H_{911}=H_{119}=12I_{x^2y}D_1+24I_{x^2y}D_{xy}$,

$H_{912}=H_{129}=12I_{x^2y}D_y+24I_{y^3}D_{xy}$, $H_{1010}=36I_{y^2}D_y$, $H_{1011}=H_{1110}=36I_{xy^2}D_1$, $H_{1012}=H_{1210}=36I_{xy^2}D_y$,

$H_{1111}=36I_{x^2y^2}D_x+36I_{x^4}D_{xy}$, $H_{1112}=H_{1211}=36I_{x^2y^2}D_1+36I_{x^2y^2}D_{xy}$, $H_{1212}=36I_{x^2y^2}D_y+36I_{y^4}D_{xy}$,

ここに $I_c=\{\bar{d}\bar{e}-\beta B_2+2\gamma B_1+\bar{c}(1-\bar{b})\}/12$, $I_x=\{2\bar{d}^2\bar{e}-2\beta B_3+3\gamma B_2+\bar{c}(1-\bar{b})(2\bar{b}+1)\}/16$,

$I_y=\{\bar{d}\bar{e}^2+\beta^2B_3-3\beta\gamma B_2+3\gamma^2B_1+\bar{c}^2(1-\bar{b})\}/6$, $I_{x^2}=\{3\bar{d}^3\bar{e}-3\beta B_4+4\gamma B_3+\bar{c}(1-\bar{b})(3\bar{b}^2+2\bar{b}+1)\}/12$

$I_{y^2}=\{\bar{d}\bar{e}^3-\beta^3B_4+4\beta^2\gamma B_3-6\beta\gamma^2B_2+4\gamma^3B_1+\bar{c}^3(1-\bar{b})\}/12$, $I_{xy}=\{3\bar{d}^2\bar{e}^2+3\beta^2B_4-8\beta\gamma B_3+6\gamma^2B_2$ $+\bar{c}^2(1-\bar{b})(3\bar{b}+1)\}/24$, $I_{x^3}=\{4\bar{d}^4\bar{e}-4\beta B_5+5\gamma B_4+\bar{c}(1-\bar{b})(4\bar{b}^3+3\bar{b}^2+2\bar{b}+1)\}/20$,

$I_{y^3}=\{\bar{d}\bar{e}^4+\beta^4B_5-5\beta^3\gamma B_4+10\beta^2\gamma^2B_3-10\beta\gamma^3B_2+5\gamma^4B_1+\bar{c}^4(1-\bar{b})\}/20$, $I_{xy^2}=\{4\bar{d}^2\bar{e}^3-4\beta^3B_5$ $+15\beta^2\gamma B_4-20\beta\gamma^2B_3+10\gamma^3B_2+\bar{c}^3(1-\bar{b})(4\bar{b}+1)\}/60$, $I_{x^2y}=\{6\bar{d}^3\bar{e}+6\beta^2B_5-15\beta\gamma B_4+10\gamma^2B_3$ $+\bar{c}^2(1-\bar{b})(6\bar{b}^2+3\bar{b}+1)\}/60$, $I_{x^2y^2}=\{10\bar{d}^3\bar{e}^3-10\beta^3B_6+36\beta^2\gamma B_5-45\beta\gamma^2B_4+20\gamma^3B_3+\bar{c}^3(1-\bar{b})$ $(10\bar{b}^2+4\bar{b}+1)\}/180$, $I_{x^4}=\{5\bar{d}^5\bar{e}-5\beta B_6+6\gamma B_5+\bar{c}(1-\bar{b})(5\bar{b}^4+4\bar{b}^3+3\bar{b}^2+2\bar{b}+1)\}/30$, $I_{y^4}=\{\bar{d}\bar{e}^5$ $-\beta^5B_6+6\beta^4\gamma B_5-15\beta^3\gamma^2B_4+20\beta^2\gamma^3B_3-15\beta\gamma^4B_2+6\gamma^5B_1+\bar{c}^5(1-\bar{b})\}/30$,

ただし $\beta=(\bar{e}-\bar{c})/(\bar{b}-\bar{d})$, $\gamma=(\bar{b}\bar{e}-\bar{c}\bar{d})/(\bar{b}-\bar{d})$, $B_n=(\bar{b}^n-\bar{d}^n)$ $(n=1,2,3,4,5,6)$

さて、解析に当っては各々の板要素の Stiffness Matrix を固定座標(X, Y, Z) に関する Stiffness Matrix

に変換表示する必要がある。いま板要素mに設置された直交座標(x, y, z)を固定座標(X, Y, Z)に変換する変換行列$(\bar{L}_m)$を式(8)で定義すれば、次の関係式をうる。

$$(F') = (L_m)(F), \qquad (U') = (L_m)(U) \quad \text{------------------------} (7)$$

ここに $(F) = (F_A\ F_B\ F_C\ F_D)^T$, $(U) = (U_A\ U_B\ U_C\ U_D)^T$, $(F_i) = (l_0 F_i^Z\ M_i^X\ M_i^Y)^T$, $(U_i) = (\omega_i^Z\ \theta_i^X\ \theta_i^Y)^T$ $(i = A, B, C, D)$。

$$(L_m) = \begin{bmatrix} (\bar{L}_m) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{L}_m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{L}_m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\bar{L}_m) \end{bmatrix} \qquad (\bar{L}_m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_m & -\sin\theta_m \\ 0 & \sin\theta_m & \cos\theta_m \end{bmatrix} \quad \text{-------} (8)$$

ただし、θ_m はX軸とx軸とのなす交角である（図-1参照）。

式(4)に式(7)を代入のうえ(K')を$(K')_m$と置いて整理すれば結局次式がえられる。

$$(F) = D_0 (K)_m (U) + (\mathbb{F}) \quad \text{------------------------------} (9)$$

ここに $(K)_m = (L_m)^T (K')_m (L_m)$, $\qquad \mathbb{F} = (L_m)^T (\mathbb{F}')$

つぎに、長さl_nに分割されたはり要素ABに対するたわみ角式および捩り角式を式(4)と同じ形式に一括統合すれば次式をうる（図-2参照）。 すなわち、はり要素nに対して

$$(f'_{AB}\ f'_{BA})^T = \alpha_n D_0 (k')_n (U') + (\mathbb{f}'_{AB}\ \mathbb{f}'_{BA})^T \quad \text{-----------------------} (10)$$

ここに $(f'_{AB}) = (l_0 P_{AB}^z\ M_{AB}^x\ M_{AB}^y)^T$, $(f'_{BA}) = (l_0 P_{BA}^z\ M_{BA}^x\ M_{BA}^y)^T$, $(U') = (U'_A\ U'_B)^T$,

$(U'_i) = (\omega_i^z\ \theta_i^x\ \theta_i^y)^T$（ただし $i = A, B$）, $(\mathbb{f}'_{AB}) = (l_0 \mathbb{P}_{AB}^z\ \mathbb{M}_{AB}^z\ \mathbb{M}_{AB}^y)^T$, $(\mathbb{f}'_{BA}) = (l_0 \mathbb{P}_{BA}^z\ \mathbb{M}_{BA}^z\ \mathbb{M}_{BA}^y)^T$,

$$(k')_n = \begin{bmatrix} (k'_{AA})_n & (k'_{AB})_n \\ (k'_{BA})_n & (k'_{BB})_n \end{bmatrix}, \quad (k'_{AA})_n = \begin{bmatrix} 12\lambda_n^2 & 0 & 6\lambda_n \\ 0 & \kappa_n & 0 \\ 6\lambda_n & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad (k'_{AB})_n = \begin{bmatrix} -12\lambda_n^2 & 0 & 6\lambda_n \\ 0 & -\kappa_n & 0 \\ -6\lambda_n & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(k'_{BA})_n = (k'_{AB})_n^T, \quad (k'_{BB})_n = \begin{bmatrix} 12\lambda_n^2 & 0 & -6\lambda_n \\ 0 & \kappa_n & 0 \\ -6\lambda_n & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ただし $\kappa_n = (GJ)_n/(EI)_n$, $\lambda_n = l_0/l_n$, $\alpha_n = (EI)_n/l_n D_0$

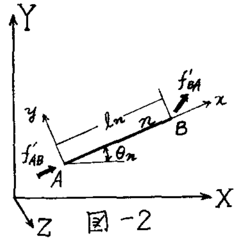


図-2

$\mathbb{P}_{AB}^z, \mathbb{P}_{BA}^z$：中間荷重による材端$A$および$B$における端せん力。

$\mathbb{M}_{AB}^z, \mathbb{M}_{BA}^x, \mathbb{M}_{AB}^y, \mathbb{M}_{BA}^y$：中間荷重による材端$A$および$B$における固定端モーメント。$(EI)_n$, $(GJ)_n$：はり要素nの曲げ剛性および捩り剛性。E：ヤング率, G：せん断弾性係数.

ここで変換行列$(\bar{L}_n)$を用いて式(10)を固定座標(X, Y, Z)に関する式に変換すれば次式がえられる。

$$(f_{AB}\ f_{BA})^T = D_0 (k)_n (U) + (\mathbb{f}_{AB}\ \mathbb{f}_{BA})^T \quad \text{-----------------------} (11)$$

ここに $(f_{AB}) = (l_0 P_{AB}^Z\ M_{AB}^X\ M_{AB}^Y)^T$, $(f_{BA}) = (l_0 P_{BA}^Z\ M_{BA}^X\ M_{BA}^Y)^T$,

$(k)_n = \alpha_n (L_n)^T (k')_n (L_n)$, $\quad (\mathbb{f}_{AB}\ \mathbb{f}_{BA})^T = (L_n)^T (\mathbb{f}'_{AB}\ \mathbb{f}'_{BA})^T$

$$(L_n) = \begin{bmatrix} (\bar{L}_n) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{L}_n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{L}_n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\bar{L}_n) \end{bmatrix} \qquad (\bar{L}_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ 0 & \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{bmatrix}$$

ただし、θ_n は部材ABがX軸となす角（図-2参照）。

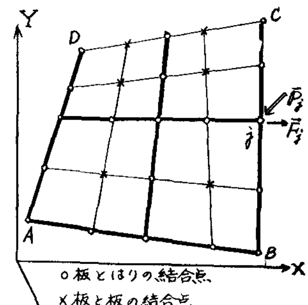


図-3

3. 有梁任意四辺形板の変形法公式　直線はりが任意間隔で縦横に配置された任意四辺形板$ABCD$を想定し、図-3に示すごとく適当な四辺形要素に分割する。任意節点jにおける外力および板に働らく不静定力の総和をそれぞれ$\mathbb{P}_j$およびF_j $(j = 1, 2, \ \ )$とし、固定座標(X, Y, Z)を図-3のごとく設置

すれば、節点jにおける力の釣合式が次式で求められる。節点jについて

$$\sum(\mathbb{F})_m + \tilde{\mathbb{F}}_j - \bar{\mathbb{F}}_j + \bar{\mathbb{P}}_j = 0 \quad \text{------} \quad (12)$$

ただし、$\tilde{\mathbb{F}}_j$は節点jにおいて板に及ぼすはりの合力を表わす。式(12)に式(9)を代入して整理すれば板全体の節点に対して次の剛性方程式をうる

$$\begin{bmatrix} (\bar{\mathbb{F}}) \\ 0 \end{bmatrix} = D_0 \begin{bmatrix} (A^*) & (a^*) \\ (A_0) & (a_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (U^*) \\ (U_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (C^*) \\ (C_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\hat{\mathbb{F}}^*) \\ (\hat{\mathbb{F}}_0) \end{bmatrix} \quad \text{------} \quad (13)$$

ここに 0:零行列，$(C_j)=\sum(\mathbb{F}_j)_m+(\bar{\mathbb{P}}_j)$，$(\bar{\mathbb{F}})=(\bar{\mathbb{F}}_1\ \bar{\mathbb{F}}_2 \cdots \bar{\mathbb{F}}_j \cdots)^T$ また添字0のある$(\mathbb{F})$，(U)および(C)はそれぞれ弾性支持点を除く節点の$(\mathbb{F}_j)$，(U_j)および(C_j)を列ベクトルで一括表示したものであり、これに対して肩字$*$のあるものはそれぞれ弾性支持点のそれらを同様に列ベクトルで表わしたものである。一方、全節点がはり要素のみで構成されると仮定した場合の格子構造の解析を同様に固定座標を基準にして行なえば以下のごとくである。ただし実際にはりで連結されていない節点間のStiffness Matrixはこれを零とおく。すなわち、任意節点jにおける力の釣合式は

$$\sum (f)_n + \hat{f}_j - \bar{f}_j = 0 \quad \text{------} \quad (14)$$

ただし$\hat{f}_j$および$\bar{f}_j$はそれぞれ節点jにおけるはりに及ぼす板の合力およびはりに働らく不静定力の総和を表わす。式(14)に式(11)を代入して式(13)と同一形式に整理すれば、結局格子構造全体の節点に対して次式が成立する。

$$\begin{bmatrix} (\bar{f}) \\ 0 \end{bmatrix} = D_0 \begin{bmatrix} (B^*) & (b^*) \\ (B_0) & (b_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (U^*) \\ (U_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (c^*) \\ (c_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\hat{f}^*) \\ (\hat{f}_0) \end{bmatrix} \quad \text{------} \quad (15)$$

ただし$(c_j)=\sum(\mathbb{f}_j)_m$，$(\bar{f})=(\bar{f}_1\ \bar{f}_2 \cdots \bar{f}_j \cdots)^T$，$(U^*)=(u_1\ u_2 \cdots u_j \cdots)^T$ また添字0のある(f)，(U)および(c)はそれぞれ弾性支持点を除く節点の(f_j)，(U_j)および(c_j)を列ベクトルで一括表示したものであり、一方肩字$*$のあるものはそれぞれ弾性支持点のそれらを同様に列ベクトルで表示したものである。さて節点jに作用する不静定力を新たに$(\bar{\mathbb{F}}_G)$で定義すれば、

$$(\bar{\mathbb{F}}_G) = (\bar{\mathbb{F}}) + (\bar{f}) \quad \text{------} \quad (16)$$

式(16)に式(13)，(15)を代入してかつ$(\hat{\mathbb{F}})=-(\hat{f})$なる関係を考慮して整理すれば次式をうる。

$$\begin{bmatrix} (\bar{\mathbb{F}}_G) \\ 0 \end{bmatrix} = D_0 \begin{bmatrix} (A^*+B^*) & (a^*+b^*) \\ (A_0+B_0) & (a_0+b_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (U^*) \\ (U_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (C^*+c^*) \\ (C_0+c_0) \end{bmatrix} \quad \text{------} \quad (17)$$

式(17)を展開すれば所要の変形法公式が次式でえられる。

$$(\bar{\mathbb{F}}_G) = D_0 (K^*)(U^*) + (\mathbb{F}) \quad \text{------} \quad (18)$$

ここに$(K^*)=(A^*+B^*)-(a^*+b^*)(a_0+b_0)^{-1}(A_0+B_0)$，$(\mathbb{F})=(C^*+c^*)-(a^*+b^*)(a_0+b_0)^{-1}(C_0+c_0)$で$(A^*)$，$(a^*)$，$(A_0)$，$(a_0)$ (B^*)，(b^*)，(B_0)および(b_0)はいずれも係数行列である。

4. 結語　はりの配置間隔が縦、横とも任意で、しかもその数が任意の有梁任意四辺形板のStiffness Matrixが式(13)，(15)，(18)より算出でき、これを用うればこの種板とはりとで構成される複合構造物の解析が一般的に可能となる[2]。なおはりを単純な線体と考えず、幅の要素を導入したより厳密なStiffness Matrixも別に誘導したが、これについては紙面の都合上割愛した。

(参考文献)

1) O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung: The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs, Proc. of the I.C.E. Vol. 28, August 1964

2) 山崎、太田、馬場先：点支承をもつ矩形板の変形法公式，第22回土木学会年次学術講演会 講演概要 昭和42年5月