

はり部材列の捩り抵抗を考慮する場合)

九州大学 正会員 山崎 伸也

九州大学 正会員 櫻 木 武

九州大学 学主員 〇金子 忠男

1 緒言 著者らは先に、「一对辺が連続はりおよびラ-メンに弾性支持され、他対辺が単純支持される矩形板の解法」⁽¹⁾⁽²⁾を発表した。これらの論文では、ともに板から弾性支持はりに垂直反力のみの伝達され曲げモーメントは伝達されない構造を対象とした。(かかる、実際に見られる上下構造物、機械、船舶、建築物などには、たとえば鉄筋コンクリート床板のように、板とはりとは一体的に結合した構造が多々ある。したがって、本研究は一对辺がラ-メンに弾性支持される矩形板において、文献(1)(2)で省略した板と弾性支持はりとの間に伝達されるモーメントをも考慮した場合の解法を提示し、かかる構造物の解析ならびに設計に資せんとするものである。なお、研究にあたり次のことと仮定する。(a)板は等方性等断面とする。(b)弾性はりのつけ剛性および捩り剛性はその全長にわたって一定とする。

2 解法

(1) 板のたわみ曲面

任意垂直荷重 $p(x, y)$ が作用する矩形板 $ACDB$ において、図-1に示すごとく直交座標系 (x, y, z) を導入すれば、板の基礎微分方程式よりえられたわみ曲面の一般解は次式で与えられる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sinh \alpha_m y + B_m y \cosh \alpha_m y + C_m \cosh \alpha_m y + D_m y \sinh \alpha_m y) \sin \alpha_m x + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh \beta_n x + B_n x \cosh \beta_n x + C_n \cosh \beta_n x + D_n x \sinh \beta_n x) \sin \beta_n y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (1) \quad \alpha_m = m\pi/a, \quad \beta_n = n\pi/b, \quad G_{mn} = f_{mn}/[D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2]$$

$$f_{mn} = -\frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dy \, dx, \quad D = \frac{E_p h_p}{12(1-\nu^2)}, \text{板剛度}, \quad a, b, \text{辺長}, \quad h_p, \text{板厚}, \quad E_p, \text{板の弾性係数}, \quad \nu, \text{ポアソン比},$$

A_m, B_m, C_m, D_m および A_n, B_n, C_n, D_n ; 積分定数, $\sinh, \cosh$, 双曲線関数 $\sinh$ および $\cosh$ の略

矩形板 $ACDB$ が辺 AB, CD で単純支持され、辺 AC, BD が板に直結したラ-メンのはり部材列(以下、単一部材列と称する)に弾性支持されているものとすれば、板の境界条件は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ 時}, \quad w=0, \quad M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0 \\ y=b \text{ 時}, \quad w=0, \quad M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0 \\ x=0 \text{ 時}, \quad w &= S_A(y) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{An} \sin \beta_n y, \\ M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} = M_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{0n} \sin \beta_n y \\ x=a \text{ 時}, \quad w &= S_B(y) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{Bn} \sin \beta_n y, \\ M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = M_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{0n} \sin \beta_n y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{数 } A_m \sim D_m, A_n \sim D_n \text{ についての連立方程式がえられるゆえ、これを解けば次の結果をうる。} \\ A_m = B_m = C_m = D_m = 0, \\ A_n = \frac{a(M_{0n} + M_{0n} \cosh \beta_n)}{2D\beta_n \alpha_n^2 \cosh \beta_n} - \frac{2C\beta_n \alpha_n \beta_n + (1-\nu)\beta_n}{2\alpha_n^2 \cosh \beta_n} S_{An} \\ + \frac{2\alpha_n \beta_n + (1-\nu)\beta_n \cosh \beta_n}{2\alpha_n^2 \cosh \beta_n} S_{Bn}, \\ B_n = -\frac{M_{0n}}{2D\beta_n} - \frac{(1-\nu)\beta_n}{2} S_{An}, \quad C_n = S_{An}, \\ D_n = \frac{M_{0n} \cosh \beta_n + M_{0n}}{2D\beta_n \alpha_n^2 \cosh \beta_n} + \frac{(1-\nu)\beta_n}{2\alpha_n^2} (S_{An} \cosh \beta_n - S_{Bn}). \end{aligned} \right\} \quad (4) \quad \alpha_n = m\pi/a, \quad \beta_n = n\pi/b$$

式(2)および式(3)に式(1)を代入すれば、積分定数 x 式(4)に含まれる S_{An}, S_{Bn} および M_{0n}, M_{0n} は板とこれを支持する部材列との間に成立する次のごとく連続条件により決定される。(i)部材列が板反力 $V_A(y) = \{V_A(y)\}$, $V_B(y) = \{V_B(y)\}$ をそれぞれ荷重と1つ受ける場

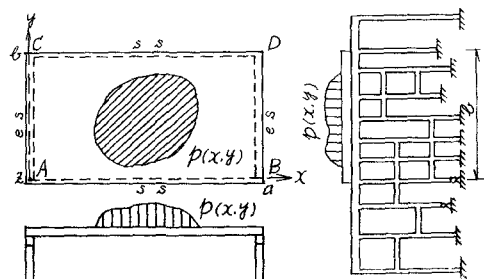


図-1

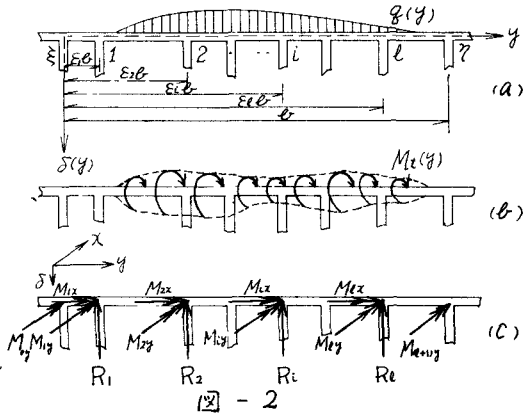
合、(1)と式(3)の w とは相等しい。(iii)辺 AC, BD に於ける板の x 軸方向の回転角 $(\partial w/\partial x)_{x=0}, (\partial w/\partial x)_{x=a}$ は、部材列がそれぞれ振りモーメント $M_A(y), M_B(y)$ をうける場合に示す接れ回転角に等しい。

辺 AC, BD における板反力 $V_A(y), V_B(y)$ は、式(4)を式(1)に代入しえられ、結果を x 軸方向の板反力 V_A と V_B と w との関係式に代入し、 $x=0, x=a$ とおくことにより次のごとく求められる。

$$\left. \begin{aligned} V_A(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} V_{An} \sin \beta_n y \\ V_B(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} V_{Bn} \sin \beta_n y \end{aligned} \right\} (5) \quad \text{ここに、} \quad \left. \begin{aligned} V_{An} &= D \left[-g(\beta_n) \frac{M_{An}}{D} - \bar{g}(\beta_n) \frac{M_{Bn}}{D} - h(\beta_n) S_{An} + \bar{h}(\beta_n) S_{Bn} + \sum_{m=1}^{\infty} \{ \alpha_m^2 + (2-\nu) \beta_n^2 \} \alpha_m G_{mn} \right] \\ V_{Bn} &= -D \left[-\bar{g}(\beta_n) \frac{M_{An}}{D} - g(\beta_n) \frac{M_{Bn}}{D} - \bar{h}(\beta_n) S_{An} + h(\beta_n) S_{Bn} + \sum_{m=1}^{\infty} (1-\nu) \{ \alpha_m^2 + (2-\nu) \beta_n^2 \} \alpha_m G_{mn} \right] \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} g(\beta_n) &= \frac{(1-\nu)\beta_n + (1+\nu)\alpha_n \beta_n}{2\alpha_n^2 \beta_n} \beta_n, & h(\beta_n) &= \frac{(1-\nu)\beta_n + (3+\nu)\alpha_n \beta_n}{2\alpha_n^2 \beta_n} (1-\nu) \beta_n^2, \\ \bar{g}(\beta_n) &= \frac{(1-\nu)\alpha_n \beta_n + (1+\nu)\alpha_n \beta_n}{2\alpha_n^2 \beta_n} \beta_n, & \bar{h}(\beta_n) &= \frac{(1-\nu)\alpha_n \beta_n + (3+\nu)\alpha_n \beta_n}{2\alpha_n^2 \beta_n} (1-\nu) \beta_n^2, \end{aligned} \right\}$$

他方、図-2(a)に示すごとく、ラーメンは長さ b なる部材列 n で板を支えるものとし、その中間の柱部材列番号を $1, 2, \dots, l$ 、部材列端から各柱部材までの距離をそれぞれ、 $\varepsilon_1 b, \varepsilon_2 b, \dots, \varepsilon_l b$ とする。また、部材列 n で板から伝達される垂直荷重および振りモーメントを一般に、 $g(y), M_n(y)$ で表わし、部材列が各中間柱部材の柱頭よりうける反力、および x, y 軸方向の反力モーメントを、 $R_1, R_2, \dots, R_l, R_l; M_{1x}, M_{1y}, \dots, M_{lx}, M_{ly}; M_{2x}, M_{2y}, \dots, M_{lx}, M_{ly}$ 、 ε_l 端に柱



および部材列の隣接スパンからうける y 軸方向のモーメントを M_{0y}, M_{l+1y} とする(図-2(b)(c)参照)。

このとき、部材列 n で示すたわみ曲線 $S(y)$ 、および接れ回転角 $\theta(y)$ は、それぞれフーリエ級数を用いて次のごとく表わされる(文献(3),(4)参照)。

$$\left. \begin{aligned} S(y) &= \frac{b^4}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} H_n \sin \beta_n y & \theta(y) &= \frac{b^3}{GJ\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} M_{0n} \sin \beta_n y \end{aligned} \right\} (7) \quad \text{ここに、} \quad \begin{aligned} H_n &= \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \sin \beta_n y - \frac{2}{b} \sum_{i=1}^l R_i \sin \beta_n \varepsilon_i + \frac{2n\pi}{b} \sum_{i=1}^l M_{0i} \cos n\pi \varepsilon_i \\ M_{0n} &= \frac{2}{b} \int_0^b M_{0y}(y) \sin \beta_n y - \frac{2}{b} \sum_{i=1}^l M_{1y} \sin n\pi \varepsilon_i \end{aligned}$$

いま一般に、辺 AC, BD において板を支持する部材列をそれぞれ $(r+1), (a+1)$ スパンとし、部材列のうける反力、反力モーメント、および部材列端のモーメントをそれぞれ、 $R_1^r, R_2^r, \dots, R_l^r, R_l^r; M_{1x}^r, M_{1y}^r, \dots, M_{lx}^r, M_{ly}^r; M_{2x}^r, M_{2y}^r, \dots, M_{lx}^r, M_{ly}^r; M_{0y}^r; M_{l+1y}^r$ とする。(このとき、式(7),(8)における $g(y)$ の代りに式(5)に示す $V_A(y), V_B(y)$ を、また $M_{0y}(y)$ の代りに式(3)に示す $M_A(y), M_B(y)$ を用い、かつ ε の代りに γ または δ を換用すれば、辺 AC, BD における部材列のたわみ曲線 $S_A(y), S_B(y)$ および接れ回転角 $\theta_A(y), \theta_B(y)$ が次のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} S_A(y) &= \frac{b^4}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} H_n^A \sin \beta_n y \\ S_B(y) &= \frac{b^4}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} H_n^B \sin \beta_n y \end{aligned} \right\} (9) \quad \text{ここに、} \quad \left. \begin{aligned} H_n^A &= V_{An} - \frac{2}{b} \sum_{i=1}^l R_i^A \sin n\pi \varepsilon_i + \frac{2n\pi}{b} \sum_{i=1}^l M_{0i}^A \cos n\pi \varepsilon_i \\ H_n^B &= V_{Bn} - \frac{2}{b} \sum_{i=1}^l R_i^B \sin n\pi \varepsilon_i + \frac{2n\pi}{b} \sum_{i=1}^l M_{0i}^B \cos n\pi \varepsilon_i \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_A(y) &= \frac{b^3}{GJ\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} M_{0n}^A \sin \beta_n y \\ \theta_B(y) &= \frac{b^3}{GJ\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} M_{0n}^B \sin \beta_n y \end{aligned} \right\} \quad \text{ここに、} \quad \begin{aligned} M_{0n}^A &= M_{An} - \frac{2}{b} \sum_{i=1}^l M_{1x}^A \sin n\pi \varepsilon_i \\ M_{0n}^B &= M_{Bn} - \frac{2}{b} \sum_{i=1}^l M_{1x}^B \sin n\pi \varepsilon_i \end{aligned}$$

したがって、前述の板と部材列との間に成立する連続条件(1)(ii)より、式(9)と式(3)とを、また式(10)と $(\partial w/\partial x)_{x=0}, (\partial w/\partial x)_{x=a}$ とを等置(係数比較すれば、 $S_{An}, S_{Bn}, M_{An}, M_{Bn}, V_{An}, V_{Bn}$ に於ける4つの関係式がえ

られ、これらに式(6)を加えた6元連立方程式を解いて、 $V_{An}, V_{Bn}, S_{An}, S_{Bn}, M_{An}, M_{Bn}$ のそれぞれ次のごとく決定される。

$$\left. \begin{aligned} V_{An} &= -\frac{\kappa_A}{n\pi^2\beta_A} \frac{A}{H} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kA}^0 \sin n\pi \varepsilon_k^A - \frac{\kappa_B}{n\pi^2\beta_B} \frac{B}{H} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kB}^0 \sin n\pi \varepsilon_k^B + \frac{C}{H} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^A \sin n\pi \varepsilon_k^A - \frac{E}{H} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^B \sin n\pi \varepsilon_k^B - \frac{G}{H} \frac{2n\pi}{\beta^2} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kA}^0 \cos n\pi \varepsilon_k^A \\ &\quad + \frac{E}{H} \frac{2n\pi}{\beta^2} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kB}^0 \cos n\pi \varepsilon_k^B + \frac{1}{n\pi\beta T} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A + (-1)^k B \right\} \frac{\alpha_m G_{mn}}{H} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ J - (-1)^k E \right\} \left\{ \alpha_m^2 + (2-\nu)\beta_m^2 \right\} \frac{\alpha_m G_{mn}}{H} \\ V_{Bn} &= \frac{\kappa_A}{n\pi^2\beta_A} \frac{A}{H} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kA}^0 \sin n\pi \varepsilon_k^A + \frac{\kappa_B}{n\pi^2\beta_B} \frac{B}{H} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kB}^0 \sin n\pi \varepsilon_k^B - \frac{E}{H} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^A \sin n\pi \varepsilon_k^A + \frac{C}{H} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^B \sin n\pi \varepsilon_k^B + \frac{E}{H} \frac{2n\pi}{\beta^2} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kA}^0 \cos n\pi \varepsilon_k^A \\ &\quad - \frac{C}{H} \frac{2n\pi}{\beta^2} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kB}^0 \cos n\pi \varepsilon_k^B - \frac{1}{n\pi\beta T} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \bar{A} + (-1)^k \bar{B} \right\} \frac{\alpha_m G_{mn}}{H} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \bar{E} - (-1)^k \bar{J} \right\} \left\{ \alpha_m^2 + (2-\nu)\beta_m^2 \right\} \frac{\alpha_m G_{mn}}{H} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{SAn} &= -\frac{2\theta_A \kappa_A}{n\pi^2\beta_A} \frac{A}{H} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kA}^0 \sin n\pi \varepsilon_k^A - \frac{2\theta_B \kappa_B}{n\pi^2\beta_B} \frac{B}{H} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kB}^0 \sin n\pi \varepsilon_k^B + \frac{2\theta_A \kappa_A}{n\pi^2\beta_A} \left(\frac{C}{H} - 1 \right) \sum_{k=1}^{\infty} R_k^A \sin n\pi \varepsilon_k^A - \frac{2\theta_B \kappa_B}{n\pi^2\beta_B} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^B \sin n\pi \varepsilon_k^B \\ &\quad - \frac{2\theta_A \kappa_A}{n\pi^2\beta_A} \left(\frac{C}{H} - 1 \right) \sum_{k=1}^{\infty} M_{kA}^0 \cos n\pi \varepsilon_k^A + \frac{2\theta_B \kappa_B}{n\pi^2\beta_B} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kB}^0 \cos n\pi \varepsilon_k^B + \frac{2\theta_A \kappa_A}{n\pi^2\beta_A} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A + (-1)^k B \right\} \frac{\alpha_m G_{mn}}{H} + \frac{2\theta_B \kappa_B}{n\pi^2\beta_B} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ J - (-1)^k E \right\} \left\{ \alpha_m^2 + (2-\nu)\beta_m^2 \right\} \frac{\alpha_m G_{mn}}{H} \\ D_{SBn} &= \frac{2\theta_A \kappa_A}{n\pi^2\beta_A} \frac{A}{H} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kA}^0 \sin n\pi \varepsilon_k^A + \frac{2\theta_B \kappa_B}{n\pi^2\beta_B} \frac{B}{H} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kB}^0 \sin n\pi \varepsilon_k^B - \frac{2\theta_A \kappa_A}{n\pi^2\beta_A} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^A \sin n\pi \varepsilon_k^A + \frac{2\theta_B \kappa_B}{n\pi^2\beta_B} \left(\frac{C}{H} - 1 \right) \sum_{k=1}^{\infty} R_k^B \sin n\pi \varepsilon_k^B \\ &\quad + \frac{2\theta_B \kappa_B}{n\pi^2\beta_B} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kB}^0 \cos n\pi \varepsilon_k^B - \frac{2\theta_A \kappa_A}{n\pi^2\beta_A} \left(\frac{C}{H} - 1 \right) \sum_{k=1}^{\infty} M_{kA}^0 \cos n\pi \varepsilon_k^A - \frac{2\theta_A \kappa_A}{n\pi^2\beta_A} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \bar{A} + (-1)^k \bar{B} \right\} \frac{\alpha_m G_{mn}}{H} + \frac{2\theta_B \kappa_B}{n\pi^2\beta_B} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \bar{E} - (-1)^k \bar{J} \right\} \left\{ \alpha_m^2 + (2-\nu)\beta_m^2 \right\} \frac{\alpha_m G_{mn}}{H} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{An} &= -\frac{\kappa_A}{n\pi^2\beta_A} \frac{A}{H} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kA}^0 \sin n\pi \varepsilon_k^A - \frac{\kappa_B}{n\pi^2\beta_B} \frac{B}{H} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kB}^0 \sin n\pi \varepsilon_k^B - \frac{2\theta_A}{n\pi^2\beta_A} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^A \sin n\pi \varepsilon_k^A + \frac{2\theta_B}{n\pi^2\beta_B} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^B \sin n\pi \varepsilon_k^B \\ &\quad + \frac{2\theta_A}{n\pi^2\beta_A} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kA}^0 \cos n\pi \varepsilon_k^A - \frac{2\theta_B}{n\pi^2\beta_B} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kB}^0 \cos n\pi \varepsilon_k^B + \frac{1}{n\pi\beta T} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A + (-1)^k B \right\} \frac{\alpha_m G_{mn}}{H} + \frac{2\theta_A}{n\pi^2\beta_A} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Psi + (-1)^k J \right\} \left\{ \alpha_m^2 + (2-\nu)\beta_m^2 \right\} \frac{\alpha_m G_{mn}}{H} \\ M_{Bn} &= -\frac{\kappa_A}{n\pi^2\beta_A} \frac{A}{H} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kA}^0 \sin n\pi \varepsilon_k^A - \frac{\kappa_B}{n\pi^2\beta_B} \frac{B}{H} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kB}^0 \sin n\pi \varepsilon_k^B - \frac{2\theta_B}{n\pi^2\beta_B} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^B \sin n\pi \varepsilon_k^B + \frac{2\theta_A}{n\pi^2\beta_A} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^A \sin n\pi \varepsilon_k^A \\ &\quad + \frac{2\theta_B}{n\pi^2\beta_B} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kB}^0 \cos n\pi \varepsilon_k^B - \frac{2\theta_A}{n\pi^2\beta_A} \sum_{k=1}^{\infty} M_{kA}^0 \cos n\pi \varepsilon_k^A + \frac{1}{n\pi\beta T} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \bar{A} + (-1)^k \bar{B} \right\} \frac{\alpha_m G_{mn}}{H} + \frac{2\theta_B}{n\pi^2\beta_B} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \bar{\Psi} + (-1)^k \bar{J} \right\} \left\{ \alpha_m^2 + (2-\nu)\beta_m^2 \right\} \frac{\alpha_m G_{mn}}{H} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここに、 $\kappa_A = ED/(E_0 I_0)$, $\kappa_B = ED/(E_0 I_0)$, $\beta_A = GAJ/(E_0 I_0)$, $\beta_B = GAJ/(E_0 I_0)$ であり、大文字のアールファベットおよびギリシャ文字はすべて自然数および Stiffness Parameter $\kappa_A, \kappa_B, \beta_A, \beta_B$ の関数である。

もし何らかの方法により部材列に作用する柱の反力および反力モーメント $R_k^A, R_k^B, M_{kA}^0, M_{kB}^0, M_{kA}^0, M_{kB}^0$ が明らかとなれば、これらを式(12)(13)に代入し、さらに式(4)に代入してえられる積分定数を式(1)に代入すれば、本題の矩形板のたわみ曲面 w がえられることとなる。また、えられた w を適宜 x, y について偏微分することにより、矩形板の任意点における諸変位、および諸断面力の解明される。

(2) 基本連立方程式の誘導 辺 AC, BD における x - y の部材列がそれぞれ垂直荷重 $V_0(y)$ 、および捩りモーメント $M_0(y)$ 、 $M_b(y)$ を与える場合の各中間の柱部材の変位量と反力、反力モーメント、および回転角との関係式は文献(3)(4)より次のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^r D_k^A R_k^A - \frac{E}{\beta_A} \sum_{k=1}^r D_k^A M_{kA}^0 &= \frac{C}{2} D_k^A + F^A d_k^A, \quad f: f=1, 2, \dots, r \\ \sum_{k=1}^r \bar{D}_k^A R_k^A - \frac{E}{\beta_A} \sum_{k=1}^r \bar{D}_k^A M_{kA}^0 &= \frac{C}{2} \bar{D}_k^A - F^A \theta_{kA}^0, \quad \theta: \theta=0, 1, \dots, r+1 \\ \frac{1}{\beta_A} \sum_{k=1}^r U_k^A M_{kA}^0 &= U_k^A + K^A \theta_{kA}^0, \quad \theta: \theta=1, 2, \dots, r \\ \sum_{k=1}^r D_k^B R_k^B - \frac{E}{\beta_B} \sum_{k=1}^r D_k^B M_{kB}^0 &= \frac{C}{2} D_k^B + F^B d_k^B, \quad f: f=1, 2, \dots, r \\ \sum_{k=1}^r \bar{D}_k^B R_k^B - \frac{E}{\beta_B} \sum_{k=1}^r \bar{D}_k^B M_{kB}^0 &= \frac{C}{2} \bar{D}_k^B - F^B \theta_{kB}^0, \quad \theta: \theta=0, 1, \dots, r+1 \\ \frac{1}{\beta_B} \sum_{k=1}^r U_k^B M_{kB}^0 &= U_k^B + K^B \theta_{kB}^0, \quad \theta: \theta=1, 2, \dots, r \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} U_k^A &= \frac{E}{n\pi^2\beta_A} \sum_{k=1}^r \sin n\pi \varepsilon_k^A \sin n\pi \varepsilon_k^A, & D_k^A &= \frac{E}{n\pi^2\beta_A} \sum_{k=1}^r \sin n\pi \varepsilon_k^A \cos n\pi \varepsilon_k^A, \\ D_k^B &= \frac{E}{n\pi^2\beta_B} \sum_{k=1}^r \sin n\pi \varepsilon_k^B \cos n\pi \varepsilon_k^B, & \bar{D}_k^B &= \frac{E}{n\pi^2\beta_B} \sum_{k=1}^r \cos n\pi \varepsilon_k^B \sin n\pi \varepsilon_k^B, \\ \bar{D}_k^A &= \frac{E}{n\pi^2\beta_A} \sum_{k=1}^r \cos n\pi \varepsilon_k^A \sin n\pi \varepsilon_k^A, & U_k^B &= \frac{E}{n\pi^2\beta_B} \sum_{k=1}^r \sin n\pi \varepsilon_k^B \sin n\pi \varepsilon_k^B, \\ D_k^A &= \frac{E}{n\pi^2\beta_A} \frac{V_{An}}{H} \sin n\pi \varepsilon_k^A, & \bar{D}_k^A &= \frac{E}{n\pi^2\beta_A} \frac{V_{Bn}}{H} \cos n\pi \varepsilon_k^A, \\ U_k^B &= \frac{E}{n\pi^2\beta_B} \frac{M_{Bn}}{H} \sin n\pi \varepsilon_k^B, & D_k^B &= \frac{E}{n\pi^2\beta_B} \frac{V_{Bn}}{H} \sin n\pi \varepsilon_k^B, \\ \bar{D}_k^B &= \frac{E}{n\pi^2\beta_B} \frac{V_{Bn}}{H} \cos n\pi \varepsilon_k^B, & U_k^A &= \frac{E}{n\pi^2\beta_A} \frac{M_{An}}{H} \sin n\pi \varepsilon_k^A, \\ F^A &= E_0 I_0 \pi^4 / (2\theta^2), & F^B &= E_0 I_0 \pi^4 / (2\theta^2), \\ K^A &= GAJ / \theta^2, & K^B &= GAJ / \theta^2, \end{aligned} \right\}$$

d_k^A, d_k^B 辺 AC, BD における x - y の部材列を交える各柱目柱部材の垂直変位量。

$\theta_{kA}^0, \theta_{kB}^0$ 辺 AC, BD における x - y の部材列の各柱目柱部材の x, y 軸方向の回転角。

式(11), (13)を式(14)に代入し、演算のうえ整理すれば、本題の基本連立方程式が次のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^r (D_k^A - F_k^A) R_k^A + \sum_{k=1}^r \bar{D}_k^A R_k^B - \frac{E}{\beta_A} \sum_{k=1}^r (D_k^A - F_k^A) M_{kA}^0 - \frac{E}{\beta_B} \sum_{k=1}^r \bar{D}_k^A M_{kB}^0 + \frac{1}{\beta_A} \sum_{k=1}^r U_k^A M_{kA}^0 + \frac{1}{\beta_B} \sum_{k=1}^r \bar{U}_k^B M_{kB}^0 &= P_k^A + F^A d_k^A, \quad f: f=1, 2, \dots, r \\ \sum_{k=1}^r (\bar{D}_k^A - \theta_{kA}^0) R_k^A + \sum_{k=1}^r \bar{D}_k^B R_k^B - \frac{E}{\beta_A} \sum_{k=1}^r (\bar{D}_k^A - \theta_{kA}^0) M_{kA}^0 - \frac{E}{\beta_B} \sum_{k=1}^r \bar{D}_k^B M_{kB}^0 + \frac{1}{\beta_A} \sum_{k=1}^r \bar{U}_k^A M_{kA}^0 + \frac{1}{\beta_B} \sum_{k=1}^r \bar{U}_k^B M_{kB}^0 &= Q_k^A - F^A \theta_{kA}^0, \quad \theta: \theta=0, 1, \dots, r+1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Lambda_i R_i - \sum_{i=1}^n \Lambda_i R_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Lambda_i M_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Lambda_i M_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (U_i + X_i) M_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i M_i &= S_k + \frac{1}{2} Q_k, \quad k=1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n P_i R_i + \sum_{i=1}^n (D_i - F_i) R_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Gamma_i M_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (D_i - F_i) M_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i M_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i M_i &= P_k + F_k D_k, \quad k=1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n Q_i R_i + \sum_{i=1}^n (D_i - Q_i) R_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Theta_i M_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (D_i - Q_i) M_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i M_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i M_i &= Q_k - F_k Q_k, \quad k=0, 1, n+1 \\ \sum_{i=1}^n \Lambda_i R_i - \sum_{i=1}^n \Lambda_i R_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Lambda_i M_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Lambda_i M_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (U_i + X_i) M_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i M_i &= S_k + \frac{1}{2} Q_k, \quad k=1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} (15)$$

ここに式(15)左辺の諸係数は形状定数と称すべきものであり、矩形板の辺長比 $(u \cdot v/a)$ 、ラ－メンの中間柱部材の位置、部材列のStiffness Parameter X_A, X_B, ρ_A, ρ_B により定まる定数である。また、右辺の $P_k, Q_k, S_k, P_k, Q_k, S_k$ は、矩形板に作用する垂直荷重により決定される荷重項である。

式(15)は全体で $(3n+3n+4)$ 元の連立方程式となるゆえ、部材列の各節点と他の条件より R または d , M または θ のいずれか一方が判明するか、あるいは R と d , M と θ との関係が明らかとなれば、条件式と未知数の数とが一致し連立方程式が解けることとなる。また、図-1に示すごとくラ－メンの場合には、式(15)の基本連立方程式の他に部材列上の節点を除くすべての節点の節点方程式、各層の層方程式、および周辺の支持条件式をたて、これらを一体とする連立方程式を解くことにより、ラ－メンの応力が求められる。

3 計算例

図-3に示すごとく、正方形板 AB CD が辺 AC, BD に共に板と π 型ラ－メンの部材列と直結し、荷重強度 p_0 なる等分布荷重を満載するものとする。

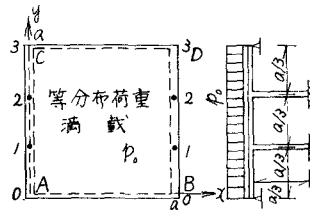


図-3

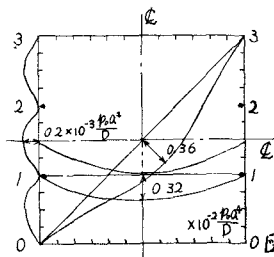


図-4

また、ラ－メンの交点、節点には、辺 AB 側より順に 0, 1, 2, 3 なる番号を付す。かかるとき、基本連立方程式(15)は12元連立方程式となり、これに $X_A = X_B = 50, \rho_A = \rho_B = 0.649$ の場合の形状定数および荷重項を代入し、さらに部材列の各節点が沈下しないものとすれば、ラ－メンの応力が求められ次のごとく算出される。

$$\left. \begin{aligned} R_1^A = R_2^A = R_3^A = R_4^A &= 0.1375 p_0 a^2 \\ -M_1^A = -M_2^A = -M_3^A = -M_4^A &= 0.00243 / p_0 a^2 \\ -M_1^B = -M_2^B = -M_3^B = -M_4^B &= 0.1187 \times 10^{-4} p_0 a^2 \end{aligned} \right\} (16)$$

式(16)の諸値を用いて式(1)を計算すれば、本例の矩形板のたわみ w

図-4のごとくえられる。また、 x, y 軸方向の曲げモーメントを算出すれば、図-5, 6に示すごとく、 M_x -図、 M_y -図がえられる。

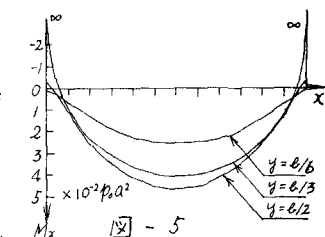


図-5

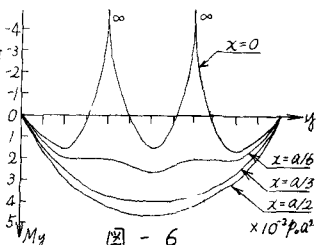


図-6

4 結 語 本法では、板のたわみ曲面 w が板を支持するラ－メン中の柱反力、反力モーメントの一次式で表わされるか、これらの反力、反力モーメントは一般に、式(15)の多元連立一次方程式を解くだけの簡単な操作により求められる点すくれた特色をもつ。また、板のたわみ曲面 w および M_x, M_y は部材列の近傍をのぞいて収斂が早く充分実用に供する。なお、本文中の式で $\rho_A = \rho_B = 0$ とすれば、文献(1)(2)の理論解と当然ながら一致する。

参考文献: (1) 山崎 稔木 全3冊、一辺の連続はりには弾性支持され、他対辺が単独支持される矩形板の解法、九大工学集報 第40巻第4号 (昭和42年7月)。(2) 山崎 稔木 全3冊、一辺がラ－メンに弾性支持され他対辺が単独支持される矩形板の解法、九大工学集報 第40巻第6号 (昭和42年1月)。(3) 山崎 稔木、フーリエ級数による連続はりおよびビラメンの解法、九大工学集報 第39巻第3号 (昭和41年9月)。(4) 山崎 稔木 提、フーリエ級数による立体ラ－メンの解法、土木学会第22回年次学術講演会全講演要 (昭和42年5月)