

九州大学 正員 山崎 徳也

, 正員 彦坂 照

, 学生員 〇 葛城 幸一郎

1. 緒言

斜板(平行四辺形板)の研究は、斜橋を対象とした土木工学と、航空機構造を対象とした航空工学の両分野でこれまで行なわれてきており、特に座屈安定問題は主として後者の研究課題として取り上げられてきたが、⁽¹⁾変断面斜板の座屈を取り扱ったものは未だ見当たらない。

本研究は四辺が単純支持または固定され、板厚が任意に変化する斜板の座屈荷重の、エネルギー法に基づく算定法を提示したもので、簡単な計算例により板厚と斜角の変化が座屈荷重値におよぼす影響を吟味したものである。

2. 変断面斜板のひずみエネルギー

図-1(a)のごとく、二辺の長さが a 、 b なる変断面斜板を考え、中立面内でこれら二辺に沿って斜交座標 x, y を、また両軸に垂直下向きに z 軸をとる。板に作用する応力 σ_x, σ_y 、および τ_{xy} を図-1(b)のごとく定義し、これらに対応するひずみを $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ とすれば、次の応力-ひずみ関係式が成立する。⁽²⁾

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E \cos^2 \theta}{1 - \nu^2} \{ \epsilon_x + (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) \epsilon_y - \cos \theta \gamma_{xy} \} \\ \sigma_y &= \frac{E \cos^2 \theta}{1 - \nu^2} \{ \epsilon_y + (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) \epsilon_x - \cos \theta \gamma_{xy} \} \\ \tau_{xy} &= \frac{E \cos^2 \theta}{1 - \nu^2} \left\{ \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta - \nu \sin^2 \theta) \gamma_{xy} - \cos \theta (\epsilon_x + \epsilon_y) \right\}\end{aligned} \quad (1)$$

ただし ν はポアソン比、 E はヤング係数

また変断面斜板のひずみエネルギー V は次式で与えられる。

$$V = \frac{1}{2} \iiint_{00}^{ab} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (2)$$

板の z 方向のたわみを w とすれば

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

の諸式が成立し、これらを式(1)に代入した後、式(1)を式(2)に代入して整理すれば、所要の変断面斜板のひずみエネルギーが次式のごとく求められる。

$$V = \frac{\sin \theta}{2} \int_0^a \int_0^b D(x, y) \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1 - \nu) \cos^2 \theta \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right\} dx dy \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\text{ただし } D(x, y) &= \frac{E t(x, y)}{12(1 - \nu^2)} & t(x, y) &: \text{点}(x, y) \text{における板厚} \\ \nabla^2 w &= \cos^2 \theta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \cos \theta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)\end{aligned}$$

3. 座屈条件式の誘導

エネルギー法により座屈荷重を算定するには、まず与えられた境界条件を満足する変位波形を仮定しなければならない。例えば四辺単純支持斜板の場合、斜交座標による境界条件は、直交座標と全く同様に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} x=0, a \text{ において } w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ y=0, b \text{ において } w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

よってこの場合の座屈波形は次の式(4)のごとき二重フーリエ正弦級数にてあらわすことができる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (4)$$

なお図-2のごとき板剛度 D が x のみの函数である場合には、簡単に次の変位波形を仮定しても差し支えない。

$$w = \sin \frac{\pi}{b} y \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (5)$$

次に四辺固定の斜板に対する境界条件は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} x=0, a \text{ において } w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ y=0, b \text{ において } w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

これを満足する座屈波形として、例えば次式を利用することができる。

$$w = \frac{1}{4} C (\cos \frac{2\pi}{a} x - 1) (\cos \frac{2\pi}{b} y - 1) \quad (6)$$

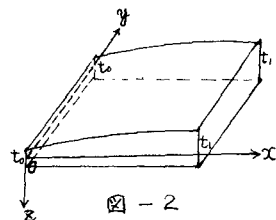


図-2

[例1] 図-3のごとき板厚が $x=0, a$ において t_0 , $x=\frac{a}{2}$ において t_1 で中間では直線変化する四辺単純支持変断面斜板が周辺からの圧縮力 N_x, N_y を受けるものとし、式(4)の座屈波形を仮定して、この場合の座屈条件式を誘導すれば、以下のごときである。

板剛度は x のみの函数であり次式で与えられる。

$$D(x) = D_0 \left\{ 1 + 2(\alpha - 1) \frac{x}{a} \right\}^3 \quad (7)$$

$$\text{ただし } D_0 = \frac{E t_0^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \alpha = \frac{t_1}{t_0}, \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{2}$$

ひずみエネルギーは式(3)に式(4), (7)を代入して求められ、結果を整理して示せば、次式にて表わされることとなる。

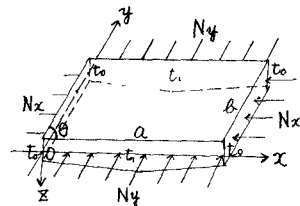


図-3

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{8} \frac{D_0}{\sin^3 \theta} a b \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A \left\{ \frac{m^4}{\lambda^2} + \lambda^2 n^4 + 2m^2 n^2 (1 + 2\cos^2 \theta) \right\} C_{mn}^2 \right. \\ & + 3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B \left(\frac{1}{\pi^2} \right)^2 \left\{ -\frac{m^4}{\lambda^2} - \lambda^2 n^4 - 2m^2 n^2 (1 - 2\cos^2 \theta) + 4\sin^2 \theta (1 - \nu) m^2 n^2 \right\} C_{mn}^2 \\ & \left. + 32 \cos \theta \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} C_{m'n'} \left(\frac{m^2}{\lambda} + \lambda n^2 \right) \frac{n}{(n^2 - n'^2)\pi} C_{mn} C_{m'n'} \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

ただし

$$A = \frac{1}{4} (\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha + 4), \quad B = (\alpha - 1) \left\{ \cos m\pi - 2 \left(\frac{1}{\pi^2} \right)^2 (\cos m\pi - 1) (\alpha - 1)^2 + 2(\alpha - 1) + (\cos m\pi - 1) \right\}$$

$$C = 8 \cdot (\alpha - 1)^3 f_1 + 12(\alpha - 1)^2 f_2 + 6(\alpha - 1) f_3 + f_4$$

ここに

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{3}{4\pi^2} \left\{ \frac{\sin \frac{m+m'}{2}\pi}{(m+m')^2} + \frac{\sin \frac{m-m'}{2}\pi}{(m-m')^2} \right\} - \frac{\delta}{\pi^4} \left\{ \frac{\sin \frac{m+m'}{2}\pi}{(m+m')^4} + \frac{\sin \frac{m-m'}{2}\pi}{(m-m')^4} \right\} \\ f_2 &= \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{\sin \frac{m+m'}{2}\pi}{(m+m')^2} + \frac{\sin \frac{m-m'}{2}\pi}{(m-m')^2} \right\} - \frac{2}{\pi^3} \left\{ \frac{1}{(m+m')^3} + \frac{1}{(m-m')^3} \right\} \\ f_3 &= \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{\sin \frac{m+m'}{2}\pi}{(m+m')^2} + \frac{\sin \frac{m-m'}{2}\pi}{(m-m')^2} \right\}, \quad f_4 = \frac{2m}{(m^2-m'^2)\pi}, \quad \lambda = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

外力 N_x, N_y のなした仕事 U は次式よりえられる。

$$U = \frac{1}{2} \iint_0^a \left\{ N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (9)$$

式(4)を式(9)に代入して整理すれば結局次式をうる。

$$U = \frac{1}{8} a b \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 N_x C_{mn}^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2 n^2 \beta N_x C_{mn}^2 \right\} \quad (10)$$

$$\text{ただし } \beta = N_y / N_x$$

$\nabla = U$ とおき両辺にそれぞれ式(8), (10)を代入すれば次式がえられる。

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi(m^2 + \lambda^2 \beta n^2) C_{mn}^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A \left\{ \frac{m^4}{\lambda^2} + \lambda^2 n^4 + 2m^2 n^2 (1 + 2\cos^2 \theta) \right\} C_{mn}^2 \\ - 3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B \left(\frac{1}{m\pi} \right)^2 \left\{ -\frac{m^4}{\lambda^2} - \lambda^2 n^4 - 2m^2 n^2 (1 - 2\cos^2 \theta) + 4\sin^2 \theta \cdot (1-\nu) m^2 n^2 \right\} C_{mn}^2 \\ - 32 \cos \theta \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} C_{mn} C_{m'n'} \left(\frac{m^2}{\lambda} + \lambda n^2 \right) \frac{n}{(n^2 - n'^2)\pi} C_{mn} C_{m'n'} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここに $\phi = N_x b^2 \cos^2 \theta / D \pi^2$, また $m \pm m'$ および $n \pm n'$ は奇数でなくてはならない。

座屈荷重 N_x, N_y は式(11)を満足する ϕ の最小値より求められるゆえ、式(11)を式(4)の未定係数 C_{mn} で表し、 $\partial \phi / \partial C_{mn} = 0$ とおけば C_{mn} に関する次の連立一次同次方程式がえられる。

$$\begin{aligned} \left[\phi(m^2 + \lambda^2 \beta n^2) - A \left\{ \frac{m^4}{\lambda^2} + \lambda^2 n^4 + 2m^2 n^2 (1 + 2\cos^2 \theta) \right\} \right. \\ \left. - 3B \left(\frac{1}{m\pi} \right)^2 \left\{ -\frac{m^4}{\lambda^2} - \lambda^2 n^4 - 2m^2 n^2 (1 - 2\cos^2 \theta) + 4\sin^2 \theta \cdot (1-\nu) m^2 n^2 \right\} \right] C_{mn} \\ - 16 \cos \theta \sum_{m'=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \left\{ C_{mn} \left(\frac{m^2}{\lambda} + \lambda n^2 \right) \frac{n}{(n^2 - n'^2)\pi} + C_{m'n'} \left(\frac{m'^2}{\lambda} + \lambda n'^2 \right) \frac{n'}{(n'^2 - n^2)\pi} \right\} C_{m'n'} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

ただし C は係数 C において m と m' を入れかえたものである。式(12)は $m+n$ が偶数である C_{mn} (例えば $C_{11}, C_{22}, C_{13}, C_{31}, \dots$) のみを未知数とする方程式と $m+n$ が奇数である C_{mn} (例えば $C_{12}, C_{21}, C_{23}, C_{32}, \dots$) のみを未知数とする方程式との独立な二種の連立方程式に分離できる。

式(12)の連立一次同次方程式がすべて 0 でない解 C_{mn} をもつべき条件から C_{mn} の係数の行列式 $= 0$ とおくことにより所要の座屈条件式がえられ、これを解いて固有値 ϕ を求めれば、座屈荷重 N_x, N_y が求められることとなる。

[例2] 図-4のごとく板厚 $x=0, a$ においてそれぞれ τ_0, τ_1 で、中間では直線変化する四辺単純支持変断面材板について、式(5)の座屈波形を用いて座屈条件式を誘導する。

この場合、板剛度は $D(x) = D_0 \{1 + (\alpha-1)x/a\}^3$ となり、 $D(x)$ と式(5)の w を式(3)および式(9)に代入すれば、 U, V がそれぞれ次式で求められる。

$$U = \frac{1}{8} a b \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} m^2 N_x C_m^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^2 \beta N_x C_m^2 \right\}$$

$$V = \frac{1}{8} \frac{D_0}{\sin^3 \theta} a b \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left[\sum_{m=1}^{\infty} D \left\{ \frac{m^4}{\lambda^2} + \lambda^2 + 2m^2(1+2\cos^2 \theta) \right\} C_m^2 \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m\lambda} \right)^2 E \left\{ -\frac{m^4}{\lambda^2} - \lambda^2 - 2m^2(1-2\cos^2 \theta) + 4\sin^2 \theta (1-\nu) m^2 \right\} C_m^2 \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \left\{ F \left(\frac{m^2 m'^2}{\lambda^2} + 2m^2 + m m' + \lambda^2 - 2\sin^2 \theta (1-\nu)(m^2 - m m') \right) \right. \right. \\ \left. \left. + G \left(\frac{m^2 m'^2}{\lambda^2} + 2m^2 - m m' + \lambda^2 - 2\sin^2 \theta (1-\nu)(m^2 - m m') \right) \right\} C_m C_{m'} \right]$$

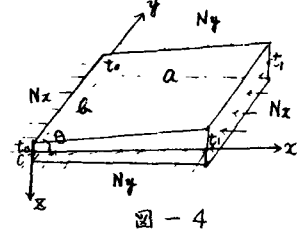


図 - 4

$$D = \frac{1}{4} (\alpha + 1) (\alpha^2 + 1)$$

$$E = \frac{3}{4} (\alpha + 1) (\alpha - 1)^2$$

$$F = 3(\alpha - 1)^2 \left\{ (\alpha - 1) \frac{(-1)^{m-m'} (m-m')^2 \pi^2 - 2(-1)^{m-m'} - 2}{(m-m')^4 \pi^4} + \frac{2(-1)^{m-m'}}{(m-m')^2 \pi^2} \right\}, G = 3(\alpha - 1)^2 \left\{ (\alpha - 1) \frac{(-1)^{m+m'} (m+m')^2 \pi^2 - 2(-1)^{m+m'} - 2}{(m+m')^4 \pi^4} + \frac{2(-1)^{m+m'}}{(m+m')^2 \pi^2} \right\}$$

$U = V$ とおき、例1と同様に両辺を C_m で偏微分して $\partial \Phi / \partial C_m = 0$ とおけば、式(12)に対応して次の連立一次同次方程式がえられる。

$$\left\{ \Phi (m^2 + \lambda^2 \beta) C_m - D \left\{ \frac{m^4}{\lambda^2} + \lambda^2 + 2m^2(1+2\cos^2 \theta) \right\} - \left(\frac{1}{m\lambda} \right)^2 E \left\{ -\frac{m^4}{\lambda^2} - \lambda^2 - 2m^2(1-2\cos^2 \theta) + 4\sin^2 \theta (1-\nu) m^2 \right\} \right\} C_m \\ - \sum_{m'=1}^{\infty} \left\{ F \left(\frac{m^2 m'^2}{\lambda^2} + 2m^2 + m m' + \lambda^2 - 2\sin^2 \theta (1-\nu)(m^2 - m m') \right) + G \left(\frac{m^2 m'^2}{\lambda^2} + 2m^2 - m m' + \lambda^2 - 2\sin^2 \theta (1-\nu)(m^2 - m m') \right) \right\} C_{m'} = 0 \quad (13)$$

4. 計算例

3. (例1) で取りあつた図-3の変断面斜板において、 $\beta = \frac{a}{b} = 1$, $N_y = 0$, $\nu = 0.3$, $\theta = \frac{2}{3}\pi (=72^\circ)$ とし、 $\alpha = \frac{a}{b}$ の変化が座屈荷重 N_x におよぼす影響を吟味した。

式(4)において m, n をそれぞれ3項までとれば、式(12)より $C_{11}, C_{22}, C_{13}, C_{31}, C_{33}$ を未知数とする5元一次連立方程式がえられ、座屈荷重はこれらの係数を要素とする 5×5 の行列式 $= 0$ を満足する解としてえられる。計算結果も同じ断面変化をえる $\theta = \frac{\pi}{2}$ の矩形板と比較して図-5に示した。

5. 結語

本研究は、エネルギー法による変断面斜板の座屈荷重算定法を提示し、四辺単純支持斜板の簡単な計算例により、板厚の変化が座屈荷重におよぼす影響を吟味したものである。

本論文では周辺圧縮力による座屈のみを取りあつたが、剪断座屈についても本法をそのまま適用することができる。

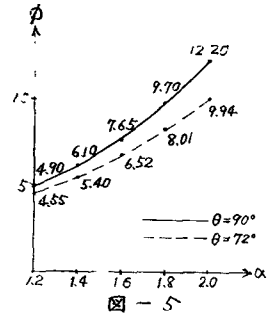


図 - 5

(参考文献)(1) Y. Yoshimura & K. Iwata "Buckling of Simply Supported Oblique Plate", Journal of Applied Mechanics, Sep. 1963

(2) L.S.D. Morley "Skew Plates and Structures" Pergamon Press 1963