

鉄筋コンクリート斜スラブの解法

九州大学 正頁 山崎徳也

正頁 〇彦坂 聡

緒言

鉄筋コンクリート(R.C.と略す)斜スラブは土木構造物にしばしば見られるものであるが、また正確な設計計算法がなく、設計者の適当な判断で簡略計算が行われているのが現状である。斜スラブに関する既往の実験および理論研究はそのほとんどが等方性スラブを対象としたもので、異方性をもつR.C.スラブにはそのまま適用しえなからず。異方性斜スラブについては、斜交座標に基くたわみ曲面の微分方程式を直接解くことが不可能であるため、専ら階差式¹⁾やMatrix Displacement Method²⁾による解析が行われてきたが、本論文は、図-1のごとく \bar{x} および \bar{y} 方向に直交異方性をもつR.C.斜スラブを対象として、Huber³⁾の式を導入することにより上記微分方程式の一般解の直接誘導を可能ならしめた。つまり、かかるスラブの任意周辺支持条件に対する一般的解法を提示するものである。

1. 曲げの基礎微分方程式

図-1のごとく、2辺の長さがそれぞれ a および b のR.C.斜スラブを考え、これら2辺に沿って斜交軸 x, y をとる。この斜交軸と原点 O および x 軸、 y 軸を共有する直交軸をそれぞれ \bar{x}, \bar{y} および x', y' とし、 x 軸と \bar{x} 軸のなす角を φ とすれば、各座標間には次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x} - \bar{y} \tan \varphi \\ y &= \bar{y} \sec \varphi \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \sec \varphi \\ y &= y' - x' \tan \varphi \end{aligned} \right\} (2)$$

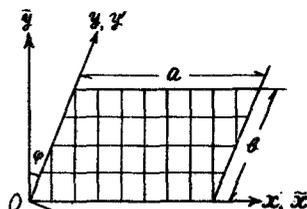


図-1

いまスラブが \bar{x}, \bar{y} 方向に直交異方性をもつものとすれば、 (\bar{x}, \bar{y}) 座標に基くたわみの基礎微分方程式は周知のごとく次式で表わされる。

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{y}^4} = 8 \quad (3)$$

$$\text{ここに } D_x = E_x b^3 / 12(1-\nu_x \nu_y), \quad D_y = E_y a^3 / 12(1-\nu_x \nu_y), \quad H = \nu_x D_x + 2D_{xy}, \quad D_{xy} = Gb^3/12,$$

E_x, E_y : \bar{x}, \bar{y} 方向のヤング係数, ν_x, ν_y : \bar{x}, \bar{y} 方向のポアソン比

G : せん断弾性係数, b : 板厚, 8 : 板に垂直な荷重強度

式(1)を用いて式(3)を (x, y) 座標に変換し、 $\sin \varphi = S, \cos \varphi = C$ とおけば次式となる。

$$(D_x C^4 + 2H C^2 S^2 + D_y S^4) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 4H(C^2 S^2 + D_y S^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(H C^2 + 3D_y S^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 4S D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 8C \quad (4)$$

ここでR.C.スラブに関するHuber³⁾の式 $H = \sqrt{D_x D_y}$ を導入し、 $\kappa = \sqrt{D_y/D_x}$ とおいて式(4)を変形すれば、結局曲げの基礎微分方程式として次式がえられる。

$$(S^2 + C^2 \kappa^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 4S(S^2 + C^2 \kappa^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(3S^2 + C^2 \kappa^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} - 4S \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \frac{C^4}{D_x} 8 = 8 \quad (5)$$

2. 境界条件の斜交座標表示

直交異方性板の断面力、すなわち曲げモーメント、捩りモーメントおよびせん断力を、式(1)の変換により斜交座標で表わせばそれぞれ次のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned}
 M_x &= -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D_x \frac{1}{c^2} \left[(c^2 + \nu_y s^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\nu_y s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\
 M_y &= -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D_y \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (s^2 + \nu_x c^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\
 M_{xy} &= 2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2D_{xy} \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\
 Q_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial w}{\partial x} + H \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -D_x \frac{1}{c^2} \left[(c^2 + \nu_x s^2) \frac{\partial w}{\partial x} + \nu_x \frac{\partial w}{\partial y} - 2\nu_x s \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right] \\
 Q_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial w}{\partial y} + H \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -D_y \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial w}{\partial y} - 3s \frac{\partial w}{\partial x \partial y} + (3s^2 + \nu_y c^2) \frac{\partial w}{\partial x} - s(s^2 + \frac{c^2}{\nu_y}) \frac{\partial w}{\partial x^2} \right]
 \end{aligned} \right\} (6)$$

い斜スラブの周辺支持条件として、図-2のごとく、(i) 4辺固定、(ii) 4辺単純支持、(iii) 1対辺自由、他対辺単純支持、(iv) 1対辺弾性梁支持、他対辺単純支持の4種を例にとれば、これらの境界条件はそれぞれ次のごとく表わされる。

$$(i) \text{ 4辺固定 } (w)_{x=0,a} = (w)_{y=0,b} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0,a} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - s \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=0,a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0,b} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - s \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{y=0,b} = 0, \quad (7)$$

$$(ii) \text{ 4辺単純支持 } (w)_{x=0,a} = (w)_{y=0,b} = (M_x)_{y=0,b} = 0, \quad (M_x)_{x=0,a} = \left[c^2 M_x + s^2 M_y + 2s c M_{xy} \right]_{x=0,a} = 0, \quad (8)$$

(iii) 1対辺自由、他対辺単純支持

$$(w)_{x=0,a} = (M_x)_{x=0,a} = (M_y)_{y=0,b} = 0, \quad (9)$$

$$(V_y)_{y=0,b} = \left[Q_y - \frac{\partial M_y}{\partial x} \right]_{y=0,b} = -D_y \frac{1}{c^2} \left[-s \left\{ s^2 + \left(\frac{2}{k} - \nu_x \right) c^2 \right\} \frac{\partial w}{\partial x} + \left\{ 3s^2 + \left(\frac{2}{k} - \nu_x \right) c^2 \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 3s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{y=0,b} = 0$$

(iv) 1対辺弾性梁支持、他対辺単純支持

$$(w)_{x=0,a} = (M_x)_{x=0,a} = 0, \quad C \frac{1}{c} \left(s \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{y=0,b} = D_y \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} + (s^2 + \nu_x c^2) \frac{\partial w}{\partial x} - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}_{y=0,b} \quad (10)$$

$$EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0,b} = D_y \frac{1}{c^2} \left[-s \left\{ s^2 + \left(\frac{2}{k} - \nu_x \right) c^2 \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left\{ 3s^2 + \left(\frac{2}{k} - \nu_x \right) c^2 \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - 3s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{y=0,b}$$

たゞし C: 梁の捩り剛性, EI: 梁の曲げ剛性

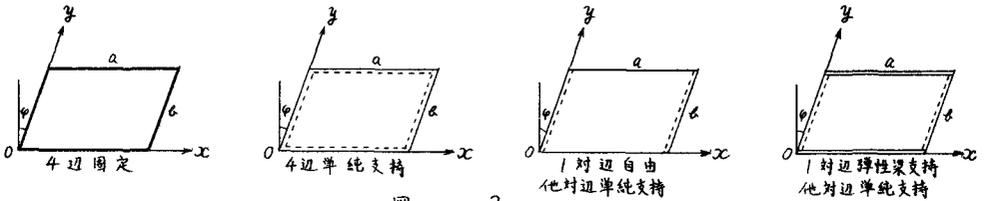


図 - 2

3. 一般解の誘導

基礎微分方程式 (5) の一般解 w は、荷重によって決まる特解 w_0 と、式 (5) の右辺を 0 とした場合の基本解 w_1 との和として求められる。すなわち

$$w = w_0 + w_1, \quad (11)$$

まず w_0 を求めるために、 $\delta = \delta(x, y)$ を二重正弦フーリエ級数で表わせば次のごとくなる。

$$\delta(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (12)$$

$$\text{いま } w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y + d_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \right) \quad (13)$$

とおき、式 (12), (13) を式 (5) に代入して両辺の係数を比較すれば、式 (13) の係数 C_{mn} , d_{mn} が次のごとく求められる。

$$C_{mn} = -\frac{\bar{c}\delta}{a^2 - b^2}, \quad d_{mn} = \frac{\bar{c}\bar{a}}{a^2 - b^2}$$

$$\text{たゞし } \bar{a} = (s^2 + \frac{c^2}{\nu_x}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + 2 \left(3s^2 + \frac{c^2}{\nu_x} \right) \frac{m\pi}{a} \left(\frac{n\pi}{b} \right), \quad \bar{c} = 4s \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left[\left(s^2 + \frac{c^2}{\nu_x} \right) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right], \quad \bar{c} = \frac{c^2}{D_y} \delta_{mn}$$

$$\text{なお } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m(\pi - \theta)}{m^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi \cosh a\theta}{2a \sinh a\pi}, \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi) \quad \text{の関係式を用いれば、式 (13) の二重級}$$

$$\text{数は } w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \left(F_m(y) \cos \frac{m\pi}{a} x + G_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \right) \quad (14)$$

$$\text{と } w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n(x) \cos \frac{n\pi}{b} y + G_n(x) \sin \frac{n\pi}{b} y \right) \quad (15)$$

のごとき単級数に直すことができ、後の取扱いが便利になる。

次に式(5)の齊次方程式を満足する基本解 w は次式で与えられる。

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (A_{1n}a + A_{2n}x) \cosh \frac{\alpha}{k} \frac{\pi n}{a} x + (A_{3n}a + A_{4n}x) \sinh \frac{\alpha}{k} \frac{\pi n}{a} x \right\} \cos \frac{\pi n}{a} (y + y_0) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (B_{1m}b + B_{2m}y) \cosh \frac{\alpha}{k} \frac{\pi m}{a} y + (B_{3m}b + B_{4m}y) \sinh \frac{\alpha}{k} \frac{\pi m}{a} y \right\} \cos \frac{\pi m}{a} (s_1 y + x) \quad (16)$$

ここに $A_{1n} \sim A_{4n}$, $B_{1m} \sim B_{4m}$ は境界条件より決まる積分定数、 $\varepsilon = s_1^2 + \frac{\alpha^2}{k^2}$ である。

4. 一般解法

任意の周辺支持条件をもつ斜スラブを考へれば、4辺 $x=0, a, y=0, b$ について、各辺につきそれぞれ2個、計8個の境界条件式が成立する。これを8個の式を式(11)の w を代入すれば、一般に次式が与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n} f_{1n}(y) + A_{2n} f_{2n}(y) + A_{3n} f_{3n}(y) + A_{4n} f_{4n}(y)] + \sum_{m=1}^{\infty} [B_{1m} g_{1m}(x) + B_{2m} g_{2m}(x) + B_{3m} g_{3m}(x) + B_{4m} g_{4m}(x)] &= \sum_{n=1}^{\infty} [F_{1n} \cos \frac{\pi n}{a} y + G_{1n} \sin \frac{\pi n}{a} y] \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n} f_{1n}(y) + \dots + A_{4n} f_{4n}(y)] + \sum_{m=1}^{\infty} [B_{1m} g_{1m}(x) + \dots + B_{4m} g_{4m}(x)] &= \sum_{n=1}^{\infty} [F_{2n} \cos \frac{\pi n}{a} y + G_{2n} \sin \frac{\pi n}{a} y] \\ \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n} f_{1n}(x) + \dots + A_{4n} f_{4n}(x)] + \sum_{m=1}^{\infty} [B_{1m} g_{1m}(x) + \dots + B_{4m} g_{4m}(x)] &= \sum_{m=1}^{\infty} [F_{3m} \cos \frac{\pi m}{a} x + G_{3m} \sin \frac{\pi m}{a} x] \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n} f_{1n}(x) + \dots + A_{4n} f_{4n}(x)] + \sum_{m=1}^{\infty} [B_{1m} g_{1m}(x) + \dots + B_{4m} g_{4m}(x)] &= \sum_{m=1}^{\infty} [F_{4m} \cos \frac{\pi m}{a} x + G_{4m} \sin \frac{\pi m}{a} x] \end{aligned} \right\} (17)$$

式(17)の左辺、右辺はそれぞれ基本解 w および特解 w_0 に由来する項である。

さて式(13)から分かるごとく、任意の境界条件に対して、式(17)の右辺の F_{in} と G_{in} の何れか一方、および F_{im} と G_{im} の何れか一方は0になる。 F_{in} , F_{im} が消滅する式では左辺をフーリエ正弦級数に、また G_{in} , G_{im} が消滅する式では同じく左辺をフーリエ余弦級数にそれぞれ展開すれば、式(17)の両辺を $\sin \frac{i\pi}{a} x$, $\sin \frac{j\pi}{a} y$ ($i, j = 1, 2, 3, \dots$) または $\cos \frac{i\pi}{a} x$, $\cos \frac{j\pi}{a} y$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots$) の項別にまとめることができ、式(17)がすべて w または w_0 に対して成立すべきことを、結局 $\sin \frac{i\pi}{a} x$, $\sin \frac{j\pi}{a} y$, $\cos \frac{i\pi}{a} x$, $\cos \frac{j\pi}{a} y$ の係数はすべて0となる。いま前記フーリエ正弦および余弦級数を、 i については M 項、 j については N 項まで取るものとすれば、式(18)から $4M + 4N$ 個の方程式が与られ、未知数 $A_{1n}, A_{2n}, A_{3n}, A_{4n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots, N$) および $B_{1m}, B_{2m}, B_{3m}, B_{4m}$ ($m = 1, 2, 3, \dots, M$) の個数と合致するゆゑ、これらの連立方程式を解いて未知数を求めることができる。かくして決定されたたわみ曲面の函数 w を式(6)に代入すれば、所要の任意点の断面力が求まることになる。

5. 計算例

式(17)の4辺固定の境界条件をもつR.C.斜スラブが、満載等分布荷重 $q(x, y) = q_0$ を受ける場合の数值計算例を以下に示す。この場合、式(12)の q_{mn} は $q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}$ となり、式(14)の $F_m(y)$, $G_m(y)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) はそれぞれ次式のごとく求められる。

$$F_m(y) = \frac{2q_0 a^4}{\pi^2 D_2} \left(\frac{k}{\varepsilon} \right) C_1 \left[\frac{\varepsilon^2 (S_1 M_1 - S_2 M_2) \varepsilon}{\cos \frac{\alpha}{k} a + \cosh \frac{\alpha}{k} a} - \eta \varepsilon \frac{\pi^2}{a^2} (S_1 M_1 + S_2 M_2) \varepsilon + \frac{2\varepsilon^2}{k^2} A_1 + k S_2 (S_1^2 + \frac{3\varepsilon^2}{k^2}) M_2 \right] / m^5 (\cos \pi m + \cosh \frac{\alpha}{k} a) \quad (18)$$

$$G_m(y) = \frac{2q_0 a^4}{\pi^2 D_2} \left(\frac{k}{\varepsilon} \right) C_1 \left[\frac{\varepsilon^2 (S_1 M_1 - S_2 M_2) \varepsilon}{\cos \pi m + \cosh \frac{\alpha}{k} a} + \eta \varepsilon \frac{\pi^2}{a^2} (S_1 M_2 - S_2 M_1) \varepsilon - \frac{2\varepsilon^2}{k^2} M_1 + k S_1 (S_1^2 + \frac{3\varepsilon^2}{k^2}) M_2 + \frac{2\varepsilon^2}{k^2} (\cos \pi m + \cosh \frac{\alpha}{k} a) \right] / m^5 (\cos \pi m + \cosh \frac{\alpha}{k} a)$$

ここに $M_1 = \cosh \frac{\alpha}{k} \eta (\cos \pi m (1 - \eta) + \cosh \frac{\alpha}{k} (1 - \eta) \cos \pi m \eta)$, $M_2 = \sinh \frac{\alpha}{k} \eta (\cos \pi m (1 - \eta) - \sinh \frac{\alpha}{k} (1 - \eta) \cos \pi m \eta)$
 $M_3 = (1 + \cos \pi m \cosh \frac{\alpha}{k}) \cosh \frac{\alpha}{k} \eta (\cos \pi m \eta + \sinh \pi m \sinh \frac{\alpha}{k} \sinh \pi m \eta \cosh \frac{\alpha}{k} \eta)$, $M_4 = (1 + \cos \pi m \cosh \frac{\alpha}{k}) \sinh \frac{\alpha}{k} \eta (\cos \pi m \eta + \sinh \pi m \sinh \frac{\alpha}{k} \sinh \pi m \eta \cosh \frac{\alpha}{k} \eta)$

$$N_1 = \sinh \frac{\delta_m}{\alpha} \gamma \sin \alpha_m (1-\gamma) + \sinh \frac{\delta_m}{\alpha} (1-\gamma) \sin \alpha_m \gamma, \quad N_2 = \cosh \frac{\delta_m}{\alpha} \gamma \sin \alpha_m (1-\gamma) - \cosh \frac{\delta_m}{\alpha} (1-\gamma) \sin \alpha_m \gamma,$$

$$N_3 = (1 + \cos \alpha_m \cosh \frac{\delta_m}{\alpha}) \sinh \frac{\delta_m}{\alpha} \gamma \sin \alpha_m \gamma - \sin \alpha_m \sinh \frac{\delta_m}{\alpha} \cosh \frac{\delta_m}{\alpha} \gamma \cos \alpha_m \gamma, \quad N_4 = (1 + \cos \alpha_m \cosh \frac{\delta_m}{\alpha}) \cosh \frac{\delta_m}{\alpha} \gamma \sin \alpha_m \gamma - \sin \alpha_m \sinh \frac{\delta_m}{\alpha} \cosh \frac{\delta_m}{\alpha} \gamma \cos \alpha_m \gamma$$

たまた $\mu = \frac{\alpha}{2}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha_m = \frac{\pi n}{2l} S_0, \quad \delta_m = \frac{\pi n}{2l} C_0$

式(15)の単級数を用いる場合にも、式(18)と同様に $F_n(x), G_n(x)$ が求まるが、ここでは省略する。

基本解 w_1 は、スラブの中央点 $(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$ に関する対称性を考慮して、式(16)が3次のごとくえられる。

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \alpha \cosh \frac{\delta_m}{\alpha} (x-\frac{\alpha}{2}) + A_{2m} (x-\frac{\alpha}{2}) \sinh \frac{\delta_m}{\alpha} (x-\frac{\alpha}{2}) \right] \cos \frac{\pi m}{2l} \left\{ \frac{\alpha}{2} (x-\frac{\alpha}{2}) + y - \frac{\alpha}{2} \right\}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[B_m \alpha \cosh \frac{\delta_m}{\alpha} (y-\frac{\alpha}{2}) + B_{2m} (y-\frac{\alpha}{2}) \sinh \frac{\delta_m}{\alpha} (y-\frac{\alpha}{2}) \right] \cos \frac{\pi m}{2l} \left\{ \frac{\alpha}{2} (y-\frac{\alpha}{2}) + x - \frac{\alpha}{2} \right\} \quad (19)$$

2 辺 $x=0$ および $y=0$ に関する計4個の境界条件式に一解 $w = w_1 + w_2$ を代入し、以下前節に述べたごとく演算を行えば、式(19)の積分定数 A_m, A_{2m}, B_m および B_{2m} が決定される。

図-3は、斜角 φ と辺長比 b/a の4種の組み合わせについて上記演算を施し、スラブの中央線 $y=b/2$ におけるたわみ w をプロットしたものである。同図中、 κ はスラブの異方性を規定するパラメータで、既に述べたごとく $\kappa = \sqrt{D_y/D_x}$ で定義される。

中央点の最大たわみについて比較すれば、 $\kappa=0.98$ では $\kappa=1$ に比して4~5%の減少しか見られぬが、 $\kappa=0.96$ になると両者のたわみの差は8~10%に達しており、R.C.斜スラブの異方性の効果が顕著に表われている。

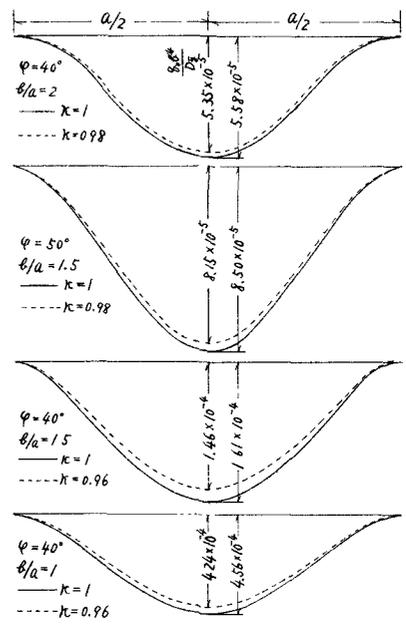


図 - 3

結語

本論文は任意垂直荷重を受け、任意周辺支持条件の鉄筋コンクリート斜スラブを対象として、かかるスラブの直交異方性を考慮したHuberの式を導入することにより基礎微分方程式(4)の直捷の解析を可能ならしめた。その一般的解法を提示したものである。

矩形板では、4辺もしくは1対辺単純支持の周辺支持条件の場合にはNavier解あるいはLévy解によって比較的容易に解きうるのに対し、斜板ではすべての境界条件について、本文の式(17)に基づく多元連立1次方程式の取扱が必要に存するが、これは電子計算機を利用することにより容易に解決される。

(参考文献) 1) 成間昌夫ほか：直交異方性平行4辺形板に対する階差方程式。土木学会論文集，第55巻 昭和33年5月，第59巻 昭和33年11月，第66巻 昭和35年1月。

2) J. H. Argyris: Matrix Displacement Analysis of Plates and Shells. Ingenieur-Archiv, XXXV BAND 1966.

3) M. T. Huber: Die Theorie Der Kreuzweise Bewehrten Eisenbetonplatten Nebst Anwendungen Auf Mehrere Bau-technisch Wichtige Aufgaben Über Rechteckige Platten. Der Bauingenieur, Heft 12 1923.