

水平流沈殿池における密度流と死水領域の発生機構について

九州大学 工学部 正員 ○栗谷陽一

〃

桐岡洋子

1 まえがき 水平流沈殿池の沈殿効果に重大な影響を及ぼすものの一つに、短絡流の問題がある。短絡流を生ずる原因としては、流入水と池内の水との密度差、流入水の流速分布又は流向、水面上の風など種々考えられており、またそれぞれの原因によって引き起こされる短絡流も、種々な様相を呈する。これらについて、概略的検討、ないしは現象論的な考察は、従来も種々行われているが、理論的な解析は、未だ不十分であると言わざるを得ない。短絡流を生ずる原因の一つとして、流入水中の浮遊物による密度流について、理論解析を試み、密度流の流速および死水領域を生ずる条件などについて、一応の結論を得たので、次節以下これについて述べる。

従来、沈殿池の密度流については、中川氏の報告¹⁾²⁾があり、密度流の流速を与えている。

2. 基礎式 水平流矩形沈殿池の中の流れを2次元流として扱い、粘性および乱れの影響を無視する。簡単のため流入水と池内の水との温度差はないものとし、浮遊物の沈降速度は一樣とし、また流入水の流速および浮遊物の濃度は、流入部全水深について一樣とし、定常状態にあるものとする。

池内の浮遊物の濃度を C 、流速を $\vec{v}$ 、沈降速度を $\vec{v}_0$ とすると、拡散を無視するから

$$-\frac{\partial C}{\partial t} = \text{div}(\vec{v} + \vec{v}_0) = C \text{div} \vec{v} + (\vec{v} + \vec{v}_0) \text{grad} C = 0$$

$\text{div} \vec{v} = 0$ であるから $(\vec{v} + \vec{v}_0) \text{grad} C = 0$ ゆえに、浮遊物の軌跡線上では濃度は一定である。しかる。流入水の濃度は一定としたから、沈殿池の内部は上澄部(密度 ρ_0)と懸濁部(密度は流入水と等し ρ_0 とする)の2部分に分れ、それぞれの内部では、密度は一樣となる。

水表面に流れ方向に X 軸、水面より鉛直下向きに Z 軸をとると、流れ関数 ψ を用いて、それぞれの部分における運動方程式は、 $u = \frac{\partial \psi}{\partial Z}$, $w = -\frac{\partial \psi}{\partial X}$ として

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial \psi}{\partial X \partial Z} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \psi}{\partial Z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X} &= 0 \\ -\frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Z} &= g \end{aligned} \right\} \quad \rho \text{ は } \rho_0 \text{ 又は } \rho_1 \quad (1)$$

これから p を消去すると、 $\frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial X} (\Delta \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Z} (\Delta \psi) = 0$ となり、さらに独立変数を (X, ψ) とすると、 $(\frac{\partial}{\partial X} \Delta \psi)_{\psi} = 0$ となり、

$$\Delta \psi = f(\psi) \quad (2)$$

をうる。ただし $f(\psi)$ は ψ の任意関数である。

簡単のため $u \gg w$ とおく、 $\frac{\partial \psi}{\partial X} \ll \frac{\partial \psi}{\partial Z}$ であるから(2)は $\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = f(\psi)$ となり、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)^2 = F(\psi) + \phi(X) \quad (3)$$

ここに $F(\psi) = \int f(\psi) d\psi$, $\phi(X)$ は ψ および X の任意関数である。(3)を流線に沿って微分すると

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_X \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)_\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_X \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial X \partial Z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \frac{\partial X}{\partial \psi} \right\} = \frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Z} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = \frac{d\phi}{dX}$$

これを(1)の第1式に代入すると $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{d\phi}{dx}$, また(1)の第2式で $\frac{\partial z}{\partial x} \ll \frac{\partial z}{\partial z}$ とすると $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = g$

$$\frac{p}{\rho} = gz - \phi(x) + \text{const} \quad (4)$$

懸濁部については、一様流入速度を u_0 とすれば、 $x=0$ で $u = \frac{\partial \psi}{\partial z} = u_0$ だから(3)より

$$\frac{1}{2} u_0^2 = \frac{1}{2} u^2 + \phi(x) - \phi(x_0) \quad [u_0 \text{ は懸濁部の流速}]$$

u_0 は x だけの関数となり、 $x=0$, $z=0$ で $p=0$, $\psi=0$ とすると、底面 $z=h$ で $\psi=u_0 h$ だから

$$\psi = u_0 h - u_0 (h-z) \quad (5)$$

$$(4) \text{ より } p = \rho_0 g z - \frac{1}{2} \rho_0 (u_0^2 - u^2) \quad (6)$$

上澄内では、流速が小さいとして水面変化を無視すれば、表面流速を u_s として(4)より

$$p = \rho_a g z + \frac{1}{2} \rho_a (u_0^2 - u_s^2) \quad (7)$$

つぎに両部分の接続条件を求める。接続面の水深および流れ関数を z_c , ψ_c とすると、

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{dz_c}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = w_0 \quad [w_0 \text{ は沈降速度}]$$

ψ , $\frac{\partial \psi}{\partial z}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ は両部分で連続だから「境界面は流線ではない」(5)を代入し、さらに積分すると

$$u_0 = \frac{u_0 h - w_0 x}{h - z_c} \quad (8)$$

$$\text{したがって(5)より } \psi_c = w_0 x \quad (9)$$

一方 z_c で(6)と(7)とは等しいから $\rho_b - \rho_a \ll \rho_a$ として

$$(\rho_b - \rho_a) g z_c = \frac{1}{2} \rho_a (u_0^2 - u_s^2) \quad (10)$$

(8)を代入して u_0 を求め(7)に代入すると、(3)(4)より

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = F(\psi) + \frac{1}{2} \left(\frac{u_0 h - w_0 x}{h - z_c} \right)^2 - \frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a} g z_c$$

$z = z_c$ とおくと(8)より

$$F(\psi_c) = \frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a} g z_c \quad (11)$$

となるから(9)を用いて

$$z = \int_0^\psi \left[\left(\frac{u_0 h - \psi_c}{h - \frac{F(\psi_c)}{\frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a} g}} \right)^2 - 2 \{ F(\psi_c) - F(\psi) \} \right]^{-\frac{1}{2}} d\psi \quad (12)$$

$\psi \approx \psi_c$ とすると、(11)より

$$\xi_c = \int_0^{\xi_c} \left\{ \left(\frac{1 - \xi_c}{1 - \xi_c} \right)^2 - K (\xi_c - \xi) \right\}^{-\frac{1}{2}} d\xi \quad (13)$$

ただし、

$$\xi = \frac{\psi}{u_0 h}, \quad \xi_c = \frac{\psi_c}{u_0 h} = \frac{w_0 x}{u_0 h}, \quad \zeta = \frac{F(\psi)}{\frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a} g h}, \quad \zeta_c = \frac{F(\psi_c)}{\frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a} g h} = \frac{z_c}{h} \quad (14)$$

$$K = \frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a} \frac{2 g h}{u_0^2} = Fr^{-2} \quad (15)$$

すなわち K は密度差に対する重力を用いたフルード数 Fr の逆2乗である。 ξ の ξ に関する積分方程式

(13)を解けば、流れの状態が求められる。

3 死水領域の発生 (8), (10)に(14)を用いれば

$$\frac{u_0}{u_0} = \sqrt{\left(\frac{1 - \xi_c}{1 - \xi_c} \right)^2 - K \xi_c} \quad (16)$$

したがって

$$\left(\frac{1-\xi_c}{1-\xi_c}\right)^2 = K\xi_c \quad (17)$$

となれば $u_b=0$ となり、そこから先は表面に死水を伴う別の解に移る。Kの値がある程度以上大きい場合には、(17)を満足する $\xi_c [0 < \xi_c < 1]$ が存在する。

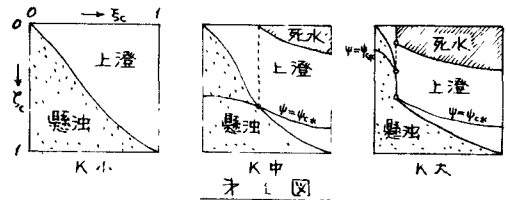
水面近くに死水域が存在する場合、上澄内部の圧力は(17)より $p = \rho_a g z + \frac{\rho_a}{2} u_b^2$ となり、これが $z = \xi_c$ において(6)に等しいとすると(17)をうる。したがって水面近くに死水域を伴う部分の流れの状態は(17)で与えられる。懸濁部では(4),(17)より $\frac{u_b}{u_0} = \sqrt{K\xi_c}$ 、上澄内では(4)より $\phi = 0$ だから、(3)より $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \sqrt{2F(\psi)}$ すなわち流線上の速度は一定である。

以上の考察から、死水の深さを z_d とすると、

$$\frac{z_d}{h} = \frac{1}{2}(3\xi_{cx} - \ln \xi_{cx}) - \frac{1}{2}(3\xi_c - \ln \xi_c) - \int_0^{\xi_{cx}} \frac{d\xi}{\sqrt{K\xi}} \quad (18)$$

ここに ξ_{cx}, ξ_{cx} は死水発生点における ξ_c, ξ_c の値である。

さて、Kの値がさらに大きい場合には、(18)の解は(17)が成立つ以前に $\frac{d\xi_c}{d\xi_c}$ が無限大となる。そして不連続的に別の解に移行することになる。これは明らかに $u \gg w$ としたため、実際には、この付近で $w \approx u$ となり、急激ではあるが、連続的に死水を伴う解に移行すると考えられる。したがって、この不連続点における接続条件に流量および各流線上のエネルギーが保存されるものと仮定すると、上部に死水領域をもつものとするれば、接続後の条件として、やはり(17)を得る。そこで $\frac{d\xi_c}{d\xi_c} = \infty$ となった所の ξ_c を用いて(17)より ξ_c を求めれば、これを境界条件として前と同様に、死水を伴う部分の流れを求めることができる。

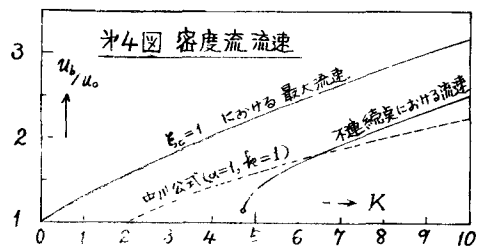


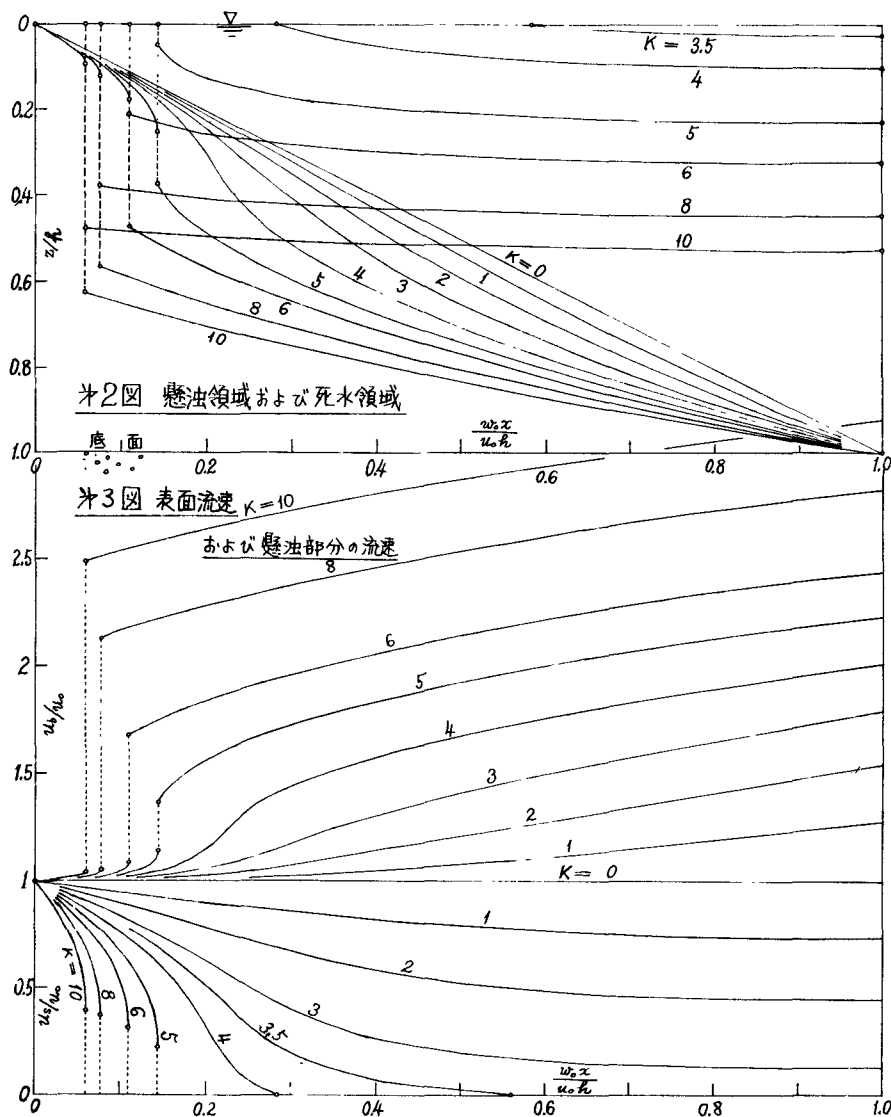
これらの様子を定性的に第1図に示す。

4 計算結果および考察 各種のKの値に対して上述のようにまず(13)を解き、さらに(17),(18)より死水を伴う部分の解を求めた結果を第2図および第3図に示す。第2図は懸濁部と上澄との境界および、死水領域を示し、また第3図は表面流速および懸濁部分の流速すなわち、いわゆる密度の流速を示す。K > 3.4 で死水域を生じ、さらに K > 4.7 では不連続、実際には下向きの流れを伴う明らかな密度流を生ずる)となる。密度流の流速として、 $\phi = 1$ すなわち泥礫をちょうど終了した所における u_b と、不連続点を通じた直後における u_b とをとると、第4図のようになる。比較のために、中川公式^{1),2)}

$$u_b = \sqrt{2\alpha \frac{\rho_c - \rho_a}{\rho_a} g h} \approx \frac{1}{\sqrt{K}}$$

において、エネルギーの有効率 α および稀釈率 β を共に1とし、一様流入に対して $\Delta h = h/2$ ととると、 $\frac{u_b}{u_0} = \sqrt{K/2}$ となる。これを第4図中の点線で示す。不連続点通過直後の値とはほぼ近い値となっている。





5 必ず 完全流体の運動方程式を解くことにより、水平流矩形沈澱池内の密度流を解き、流速と死水域とを求めた。非常に理想化しており、直ちに実地に適用することはできないが（現に、中川公式では $\alpha \approx 0.5$ 、 $\beta \approx 1.5$ としている）沈澱池における密度流と、それに伴う死水の発生について参考になれば幸いである。本論文の計算には、九州大学中央計数施設の OKITAC 5090-H 電子計算機を使用した。

参考文献 1) 水道研究, 第 23 号 P. 2

2) 水道協会雑誌, 第 258 号 P. 9

3) 同第 333 号 P. 28