

1. まえがき 海岸付近の地盤に滞留している淡水を溝あるいは井戸などによって取水するとき地盤深部に存在する塩水が淡水中に混入してきて困ることがしばしばある。これは上層淡水の取水によって淡水に流水が生じ、あるいは淡水位の低下などで浸塩境界面の圧力が下り、そのため Ghyben-Herzberg の法則にしたがって浸塩境界面がもりよってくることに起因している。取水において許される状態、すなわち下層塩水が取水中に混入しない条件のもとで、できるだけ多くの取水量を確保しようとする流れの場は図-1に示すように浸塩境界面の最も高い点(B)が溝あるいは井戸の底と一致した状態である。本報は取水溝の外の浸透流が取水溝の中心面に対して二次元の対稱流で定常であり、かつ地面が等ポテンシャル面である場合について、上述の状態での流れの場を解析した結果を砂模型によって実験し、検討を加えたものである。

2. 解析 図-1に示すように上層淡水の単位重量を γ 、下層塩水のそれを γ' として、塩水は流れていないとする。溝の側壁は不透水性の矢板壁でありその厚さは無視できるものとする。このとき図-1のように座標軸をえらび、 x 、 y の負方向の流速を u 、 v とし、速度ポテンシャルを ψ 、流れの関数を ϕ とすれば二次元ポテンシャル流の基礎理論から

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \dots (1)$$

次に、流れの場の任意点における全水頭を x 軸を基準にとつて h とし、その点における圧力を p とすれば

$$h = \frac{p}{\gamma} + y \quad \dots (2)$$

一方、透水係数を k とすると Darcy の法則は

$$u = k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = k \frac{\partial h}{\partial y} \quad \dots (3)$$

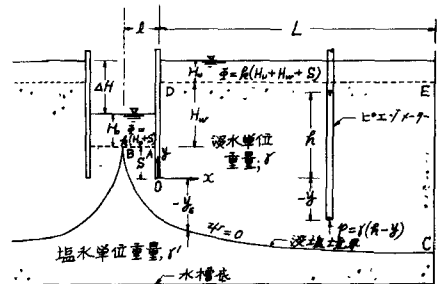
であり、したがって(1)~(3)式より

$$\psi = k \left(\frac{p}{\gamma} + y \right) \quad \dots (4)$$

がえられる。浸塩境界面、すなわち図-1のCB線における諸種の物理量に添字 s を付してあらわすと

$$p_s = \gamma H_0 + \gamma' \left(-\frac{y_s}{2} + S \right) \quad \dots (5)$$

図-1. 流れの場



$$\therefore \phi_s = k \{ H_0 + (1 + \epsilon) S \} - k' \frac{y_s}{2} \quad \dots (6)$$

ここに

$$\epsilon = (\gamma' - \gamma) / \gamma, \quad k' = k \epsilon \quad \dots (7)$$

とて、(6)式に h_{int} をえて Zhukovsky 関数¹⁾を導入しより、すなわち

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \psi + k' y, \quad \Omega_2 = \phi - k' x \\ \Omega &= \Omega_1 + i \Omega_2 = w - i k' Z \end{aligned} \right\} \quad \dots (8)$$

ここに、 w は複素ポテンシャル

$$w = \psi + i \phi \quad \dots (9)$$

であり Z は流れの場の複素表示

$$Z = x + i y \quad \dots (10)$$

である。これらについて図-1の流れの場の境界条件を整理すると表-1がえられる。これによって w および Ω 平面を画けば、Lが有限の場合に対しては図-2(a)および図-3(a)のようになり、ま

た $L = \infty$ の場合に対しては図-4(a)および図-5(a)

のようになる。この2つの場合の W 平面と Ω 平面を関係つける $t = \xi + i\eta$ 平面を図-2~5(b)のよう

にえらべば Schwarz-Christoffel の定理によって写像

関数は $t = \xi + i\eta$ (11)

を媒介変数として

$$w = -N \int \frac{dt}{\sqrt{(-b-t)\sqrt{(a-t)\sqrt{(1-t)}}}} \dots (0 < L < \infty) \dots (12)$$

$$\Omega = -M_1 \int \frac{dt}{\sqrt{(-c-t)\sqrt{(a-t)\sqrt{(1-t)}}}} \dots (L \neq \infty) \dots (13)$$

$$\Omega = \lambda M_1 \int \frac{dt}{\sqrt{(a-t)\sqrt{(1-t)}}} \dots (L = \infty) \dots (14)$$

なる積分であらわされる。ここに N, M_1, M_2, a, b および c などの定数は w および Ω 平面の境界条件によって決定される定数である。さて、各場合の t 平面の実軸は w および Ω 平面の境界に対応しているので(12), (13) および(14)式について t の実軸について行った解析結果によって まず未知定数の決定を行い、各境界値のうち取水量、浸透境界面などの主要な境界の境界値を検討しよう。

2.1 未知定数の決定

L が有限の場合 この場合、未知定数の決定手順を計算に便利のように整頓すると次のようになる。

$$\frac{c}{b} = \lambda = \frac{k^2}{m^2} \left\{ \left(1 + \varepsilon \frac{H_w}{\Delta H} \right) \frac{K(k)}{K(m)} \right\}^2 \dots (15)$$

ここに $K(k)$ の表示は k を母数とする第一種完全楕円積分である。(以下のあらわし方も同様である)

(15)式で $\varepsilon H_w / \Delta H$ を与え k^2 および m^2 を仮定すると λ が決まる。仮定にあたっては $0 < m^2 < k^2 < 1.0$ なる条件が付加される。次に

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{k^2 m^2 (\lambda - 1)}{\lambda m^2 - k^2} - 1 \\ b &= \frac{k^2 - m^2}{\lambda m^2 - k^2}, \quad c = \lambda b \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

より a, b および c が決まり

表-1. 境界条件

* 記付したものは const.

境界値 境界	$z = x + iy$	$w = \xi + i\eta$	$\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$	
	x	y	ξ	η
CB	x_1	y_1	ξ_1	* 0
BA	x	* S	* $k(H_0 + S)$	η
AOD	* 0	y	ξ	* η
DE	x	* $H_0 + S$	* $k(H_0 + H_0 + S)$	η
EC	* L	y	ξ	* 0

$0 < L < \infty$ の場合

図-2(a) $w = \xi + i\eta$

図-3(a) $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$

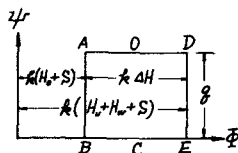


図-2(b)

w 平面に対する $t = \xi + i\eta$

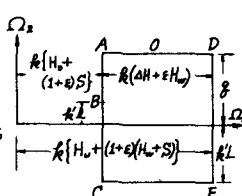


図-3(b)

Ω 平面に対する $t = \xi + i\eta$

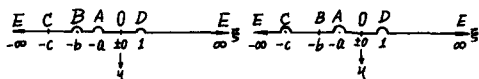


図-4(a) $w = \xi + i\eta$

図-5(a) $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$

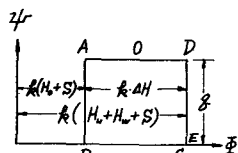


図-4(b)

w 平面に対する $t = \xi + i\eta$

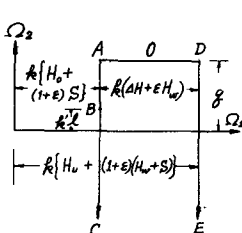
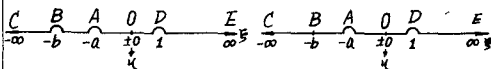


図-5(b)

Ω 平面に対する $t = \xi + i\eta$



$$\frac{L}{\Delta H} = \left(1 + \varepsilon \frac{H_w}{\Delta H} \right) \frac{K(m')}{K(m)} - \frac{K(k')}{K(k)} \dots (17)$$

ここに

$$m^2 = 1 - m^2, \quad k'^2 = 1 - k^2$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta_0 &= \frac{\kappa'}{m'} \\ \varepsilon \frac{l}{\Delta H} &= \frac{K(\kappa')}{K(\kappa)} - \left(1 + \varepsilon \frac{H_w}{\Delta H}\right) \frac{F(\theta_0, m')}{K(m')} \end{aligned} \right\} \quad \dots (18)$$

ここに、 $F(\theta, m')$ の表示は m' を母数とする第一種楕円積分である。(以下のあうめし方も同様である。)

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta_0 &= \sqrt{\frac{a(b+1)}{b(a+1)}}, \quad \sin \theta_0 = \sqrt{\frac{a(c+1)}{c(a+1)}} \\ \varepsilon \frac{S}{\Delta H} &= \frac{F(\theta_0, \kappa)}{K(\kappa)} - \left(1 + \varepsilon \frac{H_w}{\Delta H}\right) \frac{F(\theta_0, m)}{K(m)} \end{aligned} \right\} \quad \dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \sqrt{I+b}/2, \quad \mu = \sqrt{I+c}/2 \\ N &= R \cdot \Delta H \cdot \frac{\nu}{K(\kappa)}, \quad M_i = R \cdot \Delta H \left(1 + \varepsilon \frac{H_w}{\Delta H}\right) \frac{\mu}{K(m)} \end{aligned} \right\} \quad \dots (20)$$

となつて、与えられた $\varepsilon H_w / \Delta H$ と仮定の κ^2 および m^2 に対して断面形状が決まり、 κ^2 および m^2 をいろいろ変えて計算を行えばそれぞれの組合せに応じて所要の値が求まる。

$L = \infty$ の場合 この場合について未知定数の決定手順と計算に便利するように整理すると

$$\left. \begin{aligned} b &= 1 / \left\{ \left[\frac{2}{\pi} \left(1 + \varepsilon \frac{H_w}{\Delta H}\right) K(\kappa) \right]^2 - 1 \right\} \\ a &= \kappa^2 (1+b) - 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots (21)$$

まず $\varepsilon H_w / \Delta H$ を与え κ^2 を仮定すれば上の第一式より b が決まり、第二式より a が決まる。そうすると

$$\varepsilon \frac{l}{\Delta H} = \frac{K(\kappa')}{K(\kappa)} - \frac{2}{\pi} \left(1 + \varepsilon \frac{H_w}{\Delta H}\right) \tanh^{-1}(\kappa') \quad \dots (22)$$

$$\varepsilon \frac{S}{\Delta H} = \frac{F(\theta_0, \kappa)}{K(\kappa)} - \frac{2}{\pi} \left(1 + \varepsilon \frac{H_w}{\Delta H}\right) \tan^{-1}(\sqrt{a}) \quad \dots (23)$$

ここに θ_0 には (19) 式の第一式を適用する。また N 、 ν については (20) 式と同じ式がえられるが M_i については

$$M_i = \frac{1}{\pi} \cdot R \Delta H \left(1 + \varepsilon \frac{H_w}{\Delta H}\right) \quad \dots (24)$$

となつて、与えられた $\varepsilon H_w / \Delta H$ と仮定の κ^2 に対して断面形状が決まり、 κ^2 をいろいろ変えて計算を行えば、それぞれの κ^2 に対して所要の値が求まる。

このようにして未知定数が決定されると、各境界

値のうち主要な境界値であるところの溝の単位長さ当りの取水量 q 、および浸塩境界の曲線は次のようにして計算される。

2.2 取水量と浸塩境界の式

L が有限の場合 未知定数の決定にあげた (20) 式の関係を用いて無次元化された取水量および浸塩境界の曲線式は次のようになる。すなわち

$$\frac{q}{R \cdot \Delta H} = \frac{K(\kappa')}{K(\kappa)} \quad \dots (25)$$

$-c \leq t \leq -b$ で

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{(c+1)(-a-t)}{(c-a)(1-t)}}, \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{-b-t}{-a-t}} \quad \dots (26)$$

$$\varepsilon \frac{x_s}{\Delta H} = \left(1 + \varepsilon \frac{H_w}{\Delta H}\right) \frac{F(\theta, m')}{K(m')} - \frac{K(\kappa')}{K(\kappa)}$$

$$\varepsilon \frac{y_s}{\Delta H} = \varepsilon \frac{S}{\Delta H} - \frac{F(\theta, \kappa)}{K(\kappa)}$$

$L = \infty$ の場合 (20) および (24) 式の関係を用いて、

上と同様に取水量と浸塩境界の曲線式の無次元化を行えば取水量については (25) 式と同じ式となり、浸塩境界の曲線式は

$-\infty \leq t \leq -b$ で

$$\zeta = \sqrt{\frac{-a-t}{1-t}}, \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{-b-t}{-a-t}} \quad \dots (27)$$

$$\varepsilon \frac{x_s}{\Delta H} = \frac{2}{\pi} \left(1 + \varepsilon \frac{H_w}{\Delta H}\right) \tanh^{-1}(\zeta) - \frac{K(\kappa')}{K(\kappa)}$$

$$\varepsilon \frac{y_s}{\Delta H} = \varepsilon \frac{S}{\Delta H} - \frac{F(\theta, \kappa)}{K(\kappa)}$$

となる。上に上述の範囲でいろいろの値を適用すれば、それぞれの t に対して (x_s, y_s) の座標群がえられるからこれらを連ねて浸塩境界面の形状を知ることが出来る。

他の境界上の境界値も未知定数決定の段階で、もちろん必要となつてくるのであるが、紙数の都合でここでは未知定数の決定条件と取水量および浸塩境界の曲線式と計算に都合のよいように整理してあげたにとどめた。

3. 数値計算および実験 本解析の結果を用い $E\delta/\Delta H = 0$ の場合について $EL/\Delta H$ に数種の値を与えて行った数値計算の結果を図-6 に示している。計算にあたっては九州産業大学電子計算機 OKITAC 5090 によってオーソライズ積分の関数表を作成し、既往の関数表²⁾の不足を補ったものを使用した。次に、実験では大きさ $1'' \times 2'' \times 0.15''$ の両面ガラス張り水槽を用い、水槽底部に理論から予想されるだけの塩水(過マンガン酸カリウムで着色したもの)で砂の空隙を完全に飽和させておき、上部の砂は砂層中に空気が入らないようにするため淡水で徐々に飽和させながら填充してゆき、DE上を一定水頭を保って一定水頭の溝内への浸透を観測した。数種の断面について定常状態での流量 δ と水頭差 ΔH を実測し、(25)式を用いて逆算された透水係数 $k = (\delta/\Delta H) / (k(K)/K(K))$ の値はほぼ一定値(実験に用いた相馬砂に対して $k = 0.35 \text{ cm/sec}$) がえられ、また浸塩境界の曲線も理論と実験とがよく一致することから、理論が妥当であることがわかる。図-7 にはこれらの実験のうちの一例を示している。

4. おまけ 実験および計算の結果から根入長 $S=0$ の場合について次のようなことが云える。

1). $EL/\Delta H$ および $EL/\Delta H$ を与えると $EL/\Delta H$ が決まり、これは効果的な取水溝幅 $2l$ を決める上に一つの指標となる。

2). $\delta/(k\Delta H)$ および $EL/\Delta H$ は $EL/\Delta H$ を一定にすると $EL/\Delta H$ が大きいほど大きい。また $EL/\Delta H$ を一定にすると $EL/\Delta H$ が小さいところでは $EL/\Delta H$ が大きくなると急激に大きくなるが $EL/\Delta H$ がほぼ 1.0 をこえるところからほとんど増加しなくなる。

末筆ながら本研究に御指導いただいた九大工学部教授 橋本一郎博士、ならびに実験および数値計算に御協力いただいた九州産業大学土木教室有孝孝一君に感謝致します。なお本研究は昭和41年度九州産業大学特別研究費の援助のもとに行ったものの一部であることとを付記し謝意を表します。

図-6. 数値計算の結果

根入長 $S=0$ の場合

図中記載の数字は $EL/\Delta H$ の値

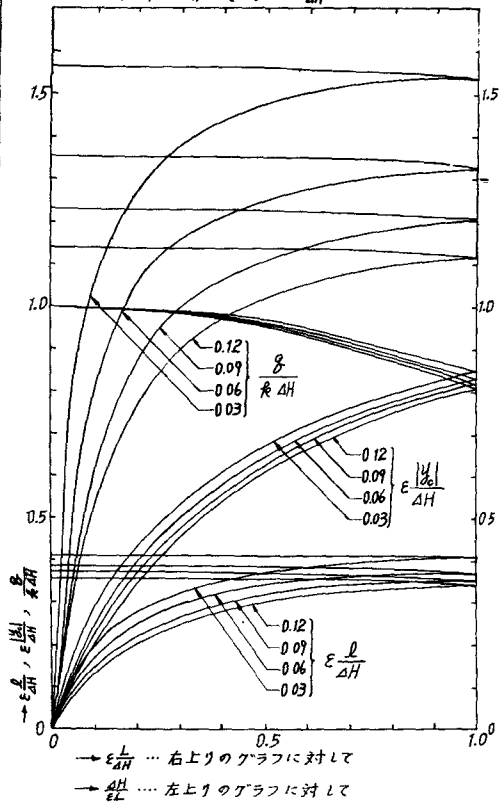
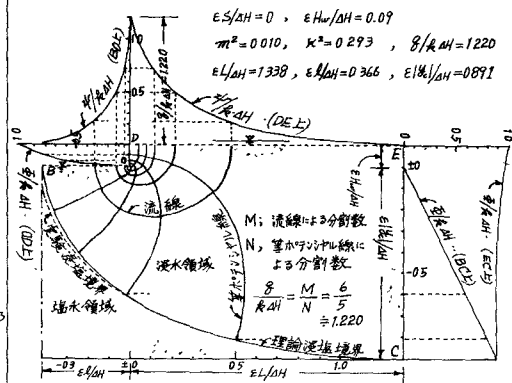


図-7. 実験および数値計算の例



参考文献

- 1) 上田、崎山；海水飽和地盤における淡水注入溝の浸透、土木学会論文集、第135号、昭和41年11月
- 2) 林、桂一；高等函数表；岩波書店、昭和16年