

弾性および弾塑性時における直線部材の撓み曲線算定法

九州大学 正員 山崎徳也
 学生員 太田俊昭

1. 序言 一般に 材軸方向に塑性領域をもつ直線部材の撓み曲線が、両材端の任意の境界条件に対して決定できれば、これを矩形ラメンおよび連続析に適用するにとりて、これらの構造物が弾性および弾塑性時に如何なる変形状態にあるか、あるいはまた如何なる変形過程を経て崩壊に達するかをつぶさに観察するといふ可能となる。かかる見地より本研究は 著者らが「さきに導いた弾塑性補正エネルギーの実用式」を利用して、両材端に不静定モーメント M_{AB} , M_{BA} と中間に任意荷重を受けた直線部材の弾性および弾塑性における撓み曲線の決定公式を誘導し、必要諸係数を数表化して実用に供しようといふものである。

2. 両端に塑性領域を有する直線部材の撓み曲線

図-1のいれ、 A, B 両端より、それぞれ AC , BD の範囲に塑性領域（すなわち(2)を参照）をもつ弾塑性直線部材 AB を考え、両材端 A, B にそれぞれ不静定モーメント M_{AB} および M_{BA} が加はし、この部材 AB に与えられる補正エネルギー U を算定すれば、すなわち(2)より

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx + \kappa_1 \int_0^{al} \frac{(M - M_{AB})^2}{2EI} dx + \kappa_1' \int_{bl}^l \frac{(M - M_{BA})^2}{2EI} dx \quad (1)$$

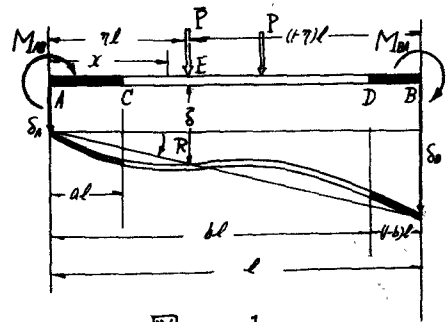


図-1

ここに M_{AB} , M_{BA} はそれぞれ C, D 点の降伏曲げモーメントを表わし、また $\kappa_1 = \kappa_1' = 1/\gamma$, κ_1' は断面形状に依る定数で詳しくはすなわち(2)を参照のこと。

また、任意点 x のたわみは図-1に示すいれ、同様に仮想荷重 P を加はし、以下のよう算定できる。すなわち、任意点 x のモーメントは

$$\left. \begin{aligned} A \sim E \text{ の区間} : M &= (1-\xi)M_{AB} + (1-\xi)M_{BA} + M_0 + (1-\gamma)\xi Pl \\ E \sim B \text{ の区間} : M &= (1-\xi)M_{AB} + (1-\xi)M_{BA} + M_0 + \gamma(1-\xi)Pl \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし $\xi = x/l$, M_0 : 中間荷重に与る点 E のモーメント

さて、式(1)に式(2)を代入し、変分原理を適用すれば、点 E のたわみ δ の値が求められる。

$$\begin{aligned} (i) \text{ 領域 } I (A \sim C) : \quad \delta_1 - \frac{\partial U}{\partial P} &= \int_0^{al} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx + \kappa_1 \int_0^{al} \frac{(M - M_{AB})}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx + \kappa_1' \int_{bl}^l \frac{(M - M_{BA})}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx \\ &= \int_0^{al} \frac{M}{EI} (1-\gamma)\xi l dx + \int_{al}^{bl} \frac{M}{EI} \gamma(1-\xi)l dx + \kappa_1 \left\{ \int_0^{al} \frac{(M - M_{AB})}{EI} (1-\gamma)\xi l dx + \right. \\ &\quad \left. \int_{al}^{bl} \frac{(M - M_{AB})}{EI} \gamma(1-\xi)l dx + \int_{bl}^l \frac{(M - M_{BA})}{EI} \gamma(1-\xi)l dx \right\} \end{aligned}$$

$$\delta_I = \frac{\rho^2}{EI} \left[\int_0^1 \{ (1-\xi)M_{AB} + (-\xi)M_{BA} + M_0 \} (1-\gamma)\xi d\xi + \int_\gamma^1 \{ (1-\xi)M_{AB} + (-\xi)M_{BA} + M_0 \} \gamma(1-\xi) d\xi \right. \\ \left. + \kappa_1 \int_0^1 \{ (1-\xi)M_{AB} + (-\xi)M_{BA} + M_0 \} (1-\gamma)\xi d\xi + \kappa_1 \int_\gamma^1 \{ (1-\xi)M_{AB} + (-\xi)M_{BA} + M_0 - M_{yB} \} \gamma(1-\xi) d\xi \right. \\ \left. + \kappa_1 \int_b^1 \{ (1-\xi)M_{AB} + (-\xi)M_{BA} + M_0 - M_{yB} \} \gamma(1-\xi) d\xi \right]$$

上式を ξ について積分し、結果を整理すれば次式を得る。

$$\delta_I = (\delta_{aI} M_{AB} + \delta_{bI} M_{BA} + \delta_{cI} M_{yA} + \delta_{dI} M_{yB} + \delta_{eI}) \times \frac{\rho^2}{EI} \quad \text{----- (3)}$$

(ii) 領域 II (C ~ D) :

$$\delta_{II} = \int_0^{\gamma l} \frac{M}{EI} (1-\gamma)\xi l d\xi + \int_{\gamma l}^l \frac{M}{EI} (1-\xi)\gamma l d\xi + \kappa_1 \left\{ \int_0^{\gamma l} \frac{(M-M_{yA})}{EI} (1-\gamma)\xi l d\xi \right. \\ \left. + \int_{\gamma l}^l \frac{(M-M_{yB})}{EI} \gamma (1-\xi) l d\xi \right\}$$

$$\therefore \delta_{II} = (\delta_{aII} M_{AB} + \delta_{bII} M_{BA} + \delta_{cII} M_{yA} + \delta_{dII} M_{yB} + \delta_{eII}) \times \frac{\rho^2}{EI} \quad \text{----- (4)}$$

(iii) 領域 III (D ~ B) :

$$\delta_{III} = \int_0^{\gamma l} \frac{M}{EI} (1-\gamma)\xi l d\xi + \int_{\gamma l}^l \frac{M}{EI} (1-\xi)\gamma l d\xi + \kappa_1 \left\{ \int_0^{\gamma l} \frac{(M-M_{yA})}{EI} (1-\gamma)\xi l d\xi + \right. \\ \left. \int_{\gamma l}^l \frac{(M-M_{yB})}{EI} (1-\gamma)\xi l d\xi + \int_{\gamma l}^l \frac{(M-M_{yB})}{EI} \gamma (1-\xi) l d\xi \right\}$$

$$\therefore \delta_{III} = (\delta_{aIII} M_{AB} + \delta_{bIII} M_{BA} + \delta_{cIII} M_{yA} + \delta_{dIII} M_{yB} + \delta_{eIII}) \times \frac{\rho^2}{EI} \quad \text{----- (5)}$$

$$\text{以上より 所要の接点曲線決定公式は } \delta_i = \delta_i + (1-\gamma)\delta_a + \gamma\delta_b \quad \text{----- (6)}$$

よって $\delta_{aI}, \delta_{bI}, \delta_{cI}, \delta_{dI}, \delta_{aII}, \delta_{bII}, \dots, \delta_{dIII}$ の式内容は 表-1 に示すようにして、部材の 10 等分点に於ける諸値を a, b を変数として数表化して利用に供すため、紙面の都合上、ここでは表-3 にその一例を示すに止めた。また $\delta_{eI}, \delta_{eII}, \delta_{eIII}$ は中点荷重によるたわみ影響量であり、式(6)で与えられる。

表-1

i	I	II	III
δ_{aI}	$\kappa_1 \{ \gamma f_1(a) - g_1(\gamma) \}$ $+ \gamma \{ f_1(b) - f_1(a) \}$ $+ \kappa_1' \gamma \{ f_1(1) - f_1(b) \}$	$\kappa_1' \{ \gamma f_1(a) - g_1(a) \}$ $+ \gamma \{ f_1(b) - f_1(a) \}$ $- g_1(\gamma) + g_1(a)$ $+ \kappa_1' \gamma \{ f_1(1) - f_1(b) \}$	$\kappa_1' \{ \gamma f_1(a) - g_1(a) \}$ $+ \gamma \{ f_1(b) - f_1(a) \} - g_1(b)$ $+ g_1(a) + \kappa_1' [\gamma \{ f_1(1) - f_1(b) \}$ $- \{ g_1(\gamma) - g_1(b) \}]$
δ_{bI}	$\kappa_1' \{ \gamma f_2(a) - g_2(\gamma) \}$ $+ \gamma \{ f_2(b) - f_2(a) \}$ $+ \kappa_1' \gamma \{ f_2(1) - f_2(b) \}$	$\kappa_1' \{ \gamma f_2(a) - g_2(a) \}$ $+ \gamma \{ f_2(b) - f_2(a) \}$ $- g_2(\gamma) + g_2(a)$ $+ \kappa_1' \gamma \{ f_2(1) - f_2(b) \}$	$\kappa_1' \{ \gamma f_2(a) - g_2(a) \}$ $+ \gamma \{ f_2(b) - f_2(a) \} - g_2(b)$ $+ g_2(a) + \kappa_1' [\gamma \{ f_2(1) - f_2(b) \}$ $- \{ g_2(\gamma) - g_2(b) \}]$
δ_{cI}	$(1-\kappa_1') \{ \gamma f_3(a) - g_3(\gamma) \}$	$(1-\kappa_1') \{ \gamma f_3(a) - g_3(a) \}$	$(1-\kappa_1') \{ \gamma f_3(a) - g_3(a) \}$
δ_{dI}	$(1-\kappa_1') \{ f_3(1) - f_3(b) \} \gamma$	$(1-\kappa_1') \{ f_3(1) - f_3(b) \} \gamma$	$(1-\kappa_1') [\gamma \{ f_3(1) - f_3(b) \}$ $- \{ g_3(\gamma) - g_3(b) \}]$

ただし $f_1(x) = x - x^2 + x^3/3, f_2(x) = x^2/2 + x^3/3, f_3(x) = x - x^2/2, g_1(x) = \gamma x - (1-\gamma)x^2/2 + x^3/3, g_2(x) = \gamma x^2/2 + x^3/3, g_3(x) = \gamma x - x^2/2$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{0x} &= \int_0^{\eta} M_0(1-\eta)\xi d\xi + \int_{\eta}^1 M_0\eta(1-\xi)d\xi + \kappa_1 \left\{ \int_0^{\eta} M_0(1-\eta)\xi d\xi + \int_{\eta}^a M_0\eta(1-\xi)d\xi + \int_b^1 M_0\eta(1-\xi)d\xi \right\} \\ \delta_{0x} &= \int_0^{\eta} M_0(1-\eta)\xi d\xi + \int_{\eta}^1 M_0\eta(1-\xi)d\xi + \kappa_1 \left\{ \int_0^a M_0(1-\eta)\xi d\xi + \int_b^1 M_0\eta(1-\xi)d\xi \right\} \\ \delta_{0x} &= \int_0^{\eta} M_0(1-\eta)\xi d\xi + \int_{\eta}^1 M_0\eta(1-\xi)d\xi + \kappa_1 \left\{ \int_0^a M_0(1-\eta)\xi d\xi + \int_b^1 M_0\eta(1-\xi)d\xi + \int_{\eta}^b M_0\eta(1-\xi)d\xi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

なお上記諸係数 δ_{0x}, δ_{0x} は一荷重に因する δ_{0x} であり、 $a=0, b=1$ ならば、直ちに式(4)(6)は弾性時の直線部材の撓み曲線の決定公式となる。

3. 中間に塑性領域を有する直線部材の撓み曲線

図-2 の η より CD の範囲に於て塑性領域を有する弾塑性直線部材 AB を考え、両材端 A, B にそれぞれ不静定モーメント M_{AB} と M_{BA} が作用するときの部材全体に貯えられる補正エネルギー U は、式(1)と同様、次式で表わされる。

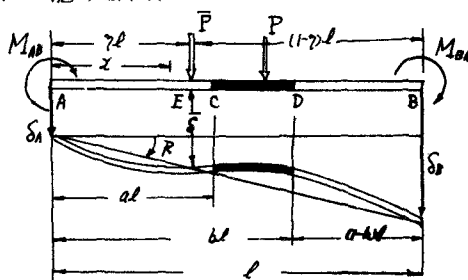


図-2

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx + \kappa_1 \int_a^b \frac{(M - M_0)^2}{2EI} dx$$

2. の場合と同様に、任意点 E に仮想荷重 P を加え、変分原理を適用して領域 i ($i=I, II, III$) の撓み曲線 $\bar{\delta}_i$ を求めて整理すれば、結局次のように導かれる。

$$\bar{\delta}_i = (\delta_{0i} M_{AB} + \delta_{0i} M_{BA} + \delta_{0i} M_{yc} + \delta_{0i}) \times \frac{l^2}{EI} + (1-\eta)\delta_A + \eta\delta_B \quad (18)$$

ここに $\delta_{0i}, \delta_{0i}, \delta_{0i}$ は表-2 に示すようになり、また δ_{0i} は中間荷重に及ぼす影響量 η 、それぞれ式(9)で与えられる。 δ_A, δ_B は節点 A, B の節点変位である。

表-2

i	I	II	III
δ_{0i}	$\eta f_1(a) - g_1(\eta) + \kappa_1' [\eta \{ f_1(b) - f_1(a) \} + \eta \{ f_1(2) - f_1(b) \}]$	$\eta f_1(a) - g_1(a) + \kappa_1' [\eta \{ f_1(b) - f_1(a) \} - \{ g_1(\eta) - g_1(a) \} + \eta \{ f_1(2) - f_1(b) \}]$	$\eta f_1(a) - g_1(a) + \kappa_1' [\eta \{ f_1(b) - f_1(a) \} - \{ g_1(\eta) - \{ g_1(b) - g_1(a) \} \} + \eta \{ f_1(2) - f_1(b) \} - g_1(\eta) + g_1(b)]$
δ_{0i}	$\eta f_2(a) - g_2(\eta) + \kappa_1' [\eta \{ f_2(b) - f_2(a) \} + \eta \{ f_2(2) - f_2(b) \}]$	$\eta f_2(a) - g_2(a) + \kappa_1' [\eta \{ f_2(b) - f_2(a) \} - \{ g_2(\eta) - g_2(a) \} + \eta \{ f_2(2) - f_2(b) \}]$	$\eta f_2(a) - g_2(a) + \kappa_1' [\eta \{ f_2(b) - f_2(a) \} - \{ f_2(a) - \{ g_2(b) - g_2(a) \} \} + \eta \{ f_2(2) - f_2(b) \} - g_2(\eta) + g_2(b)]$
δ_{0i}	$(1-\kappa_1') \{ f_3(b) - f_3(a) \} \eta$	$(1-\kappa_1') [\eta \{ f_3(b) - f_3(a) \} - g_3(\eta) + g_3(a)]$	$(1-\kappa_1') [\eta \{ f_3(b) - f_3(a) \} - g_3(b) + g_3(a)]$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{01} &= \int_0^1 M_0(1-\gamma)\xi d\xi + \int_\gamma^1 M_1\gamma(1-\xi)d\xi + K_1 \int_a^b M_0\gamma(1-\xi)d\xi \\ \delta_{02} &= \int_0^1 M_0(1-\gamma)\xi d\xi + \int_\gamma^1 M_0\gamma(1-\xi)d\xi + K_1 \left\{ \int_a^1 M_0(1-\gamma)\xi d\xi + \int_\gamma^b M_0\gamma(1-\xi)d\xi \right\} \\ \delta_{03} &= \int_0^1 M_0(1-\gamma)\xi d\xi + \int_\gamma^1 M_0\gamma(1-\xi)d\xi + K_1 \int_a^b M_0(1-\gamma)\xi d\xi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

[矩形断面の直線部材の基本変位($a=0.2, b=0.8$)] 表-3

γ	δ_{01}	δ_{02}	δ_{03}	δ_{d1}
0.1	0.0636	-0.0264	0.0130	0.0020
0.2	0.0912	-0.0488	0.0160	0.0040
0.3	0.0983	-0.0667	0.0140	0.0060
0.4	0.0984	-0.0816	0.0120	0.0080
0.5	0.0925	-0.0925	0.0100	0.0100
0.6	0.0816	-0.0984	0.0080	0.0120
0.7	0.0667	-0.0983	0.0060	0.0140
0.8	0.0488	-0.0912	0.0040	0.0160
0.9	0.0264	-0.0636	0.0020	0.0130

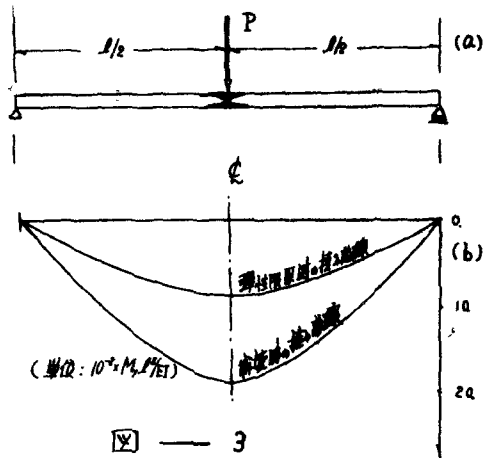


図 — 3

4. 計算例

図-3(a)および図-4(a)に示す矩形断面の単純梁の両端固定はりから、集中荷重Pを受けるて崩壊するまでの撓み曲線を算定し、結果をそれぞれ

図-3(b)および図-4(b)に図示した。

5. 結び

本論文は直線部材で構成されるラメンおよび連続桁の弾性および弾塑性時における撓み曲線を、直接数値で決定する実用解法を提示したもので、本研究の結果、図-3(a)および図-4(a)に示すように、塑性領域

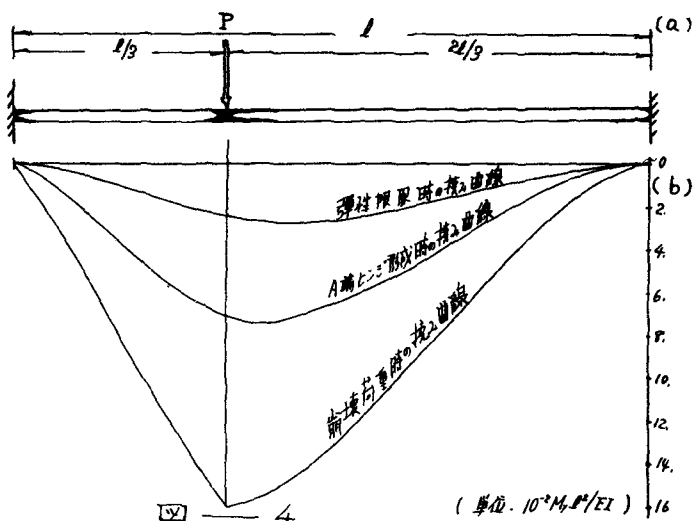


図 — 4

域発生に伴う曲げ剛性の減少と、塑性ヒンジ形成後のたわみ角の不連続現象などの、上記構造物が弾塑性時に示す変形特性の全貌を簡明に把握できるようになった。

(文献)

- (1) T. Yamazaki and T. Ohta : Simplified Elasto-Plastic Analysis of Structures by Complementary Energy Method, Proc. of the 1964 J.N.C. for A.M., 1964
- (2) 山崎和昭石川 : 補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析, 土木学会論文集, 第134号, 昭和41年10月