

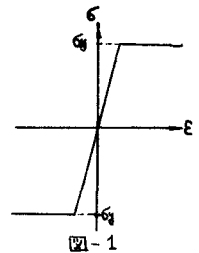
1. 序言 軸荷重および横荷重を受ける部材の安定問題に関する研究には、図-1のごとき応力-歪関係に基づき応力の釣合条件式より直接たわみ形を求める *Jaeger* の厳密解法およびたわみ形を半波形の正弦曲線に仮定する近似解法¹⁾があるが、これらはいずれも横荷重と軸荷重の比が常に一定であるという仮定が含まれており一般性に欠ける難点がある。上記欠点を排除すべく著者等は先に矩形等断面両端単純支持直線ばりに任意単一横荷重あるいは等分布横荷重が作用する場合の安定について、たわみ形を正弦曲線に仮定する近似解法²⁾を提案したが、本論文では自由端に任意の単一集中横荷重を受ける矩形等断面片持ばりの安定問題を一般的に論じた。

本研究においては次の仮定を設ける。

(a) 応力-歪関係は図-1で表わされるものとする。

(b) 変位は部材断面寸法に比較して微小なるものとする。

(c) 材軸に垂直な任意の断面は変形後も平面を保ち、材軸に垂直であるとする。



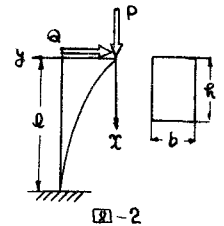
2. 基本的考察 図-2のごとき自由端に漸増軸荷重 P および任意単一横荷重

Q を受ける、スパン l で $b \times h$ の矩形等断面片持直線ばりにおいて自由端を原点とする x , y 軸を定めれば、部材各断面の応力状態は図-3に示す A, B, C の3種類があり、各応力状態に対する曲率 $1/\rho$ とモーメント M の関係は文献(2)よりそれぞれ次式のごとくなる。

$$\text{応力状態 A ; } 1/\rho_1 \div d^2 y_1 / dx_1^2 = -12 |M| / Eb h^3 \quad (1)$$

$$\text{応力状態 B ; } \frac{1}{\rho_2} \div \frac{d^2 y_2}{dx_2^2} = - \frac{8 (6y - 6_0)^3}{9 E h^2 [(6y - 6_0) - 2|M|/bh^2]^2} \quad (2)$$

$$\text{応力状態 C ; } \frac{1}{\rho_3} \div \frac{d^2 y_3}{dx_3^2} = - \frac{6y}{E h^2 \sqrt{3(1 - 6_0^2/6y^2)/4 - 3|M|/bh^2 6y}} \quad (3)$$



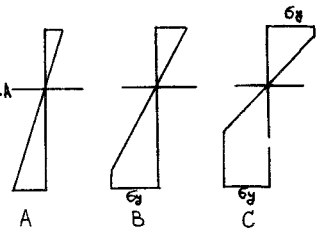
ここに E : ヤング率, $6y$: 引張降伏応力, $6_0 = P/bh$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ はそれぞれ応力状態 A, B, C に対する x および y 値。

次に部材上の任意点のモーメントは図-2より $M = -(Py + Qx)$

であり、ここで $P = bh 6_0$, $Q = bh^2 6_y l / 6l$, $n = f 6_y / 6_0$, $\bar{y} = y/h$, $\bar{x} = x/l$ とおけば次式がえられる。

$$M = -bh^2 6_0 (\bar{y} + n \bar{x}) \quad (4)$$

ここに $f = Q/Q_y$, Q_y : 単一横荷重のみにより固定端が降伏するときの荷重



次に式(4)を式(1), (2), (3)に代入し, $d^2 y / dx^2 = h/l^2 \cdot d^2 \bar{y} / d \bar{x}^2$ なる関係を考慮すれば各応力状態に対する部材のたわみの微分方程式がそれぞれ次のごとく導かれる。

$$\text{応力状態 A ; } \frac{d^2 \bar{y}_1}{d \bar{x}_1^2} = - \frac{6_0 \lambda^2}{E} (\bar{y}_1 + \eta \bar{x}_1) \quad (5)$$

$$\text{応力状態 B ; } \frac{d^2 \bar{y}_2}{d \bar{x}_2^2} = - \frac{2(1-g)^3 6_g \lambda^2}{27 E [1-g-2g(\bar{y}_2 + \eta \bar{x}_2)]^2} \quad (6)$$

$$\text{応力状態 C ; } \frac{d^2 \bar{y}_3}{d \bar{x}_3^2} = - \frac{6_g \lambda^2}{12 E \sqrt{3(1-g^2)/4 - 3g(\bar{y}_3 + \eta \bar{x}_3)}} \quad (7)$$

ここに $\lambda = 2\sqrt{3} l / R$: 細長比, $g = 6_0 / 6_g$

式(5), (6), (7) を解けば各応力状態に対するたわみおよびたわみ角の一般解がそれぞれ次に示すごとく求まる。³⁾

$$\left. \begin{aligned} \text{応力状態 A ; } \frac{d \bar{y}_1}{d \bar{x}_1} &= \sqrt{A^2 - U^2} - \eta \\ \bar{x}_1 &= 1/\alpha_1 \cdot \sin^{-1}(U/A) + B \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに $U = \alpha_1 (\bar{y}_1 + \eta \bar{x}_1)$, $\alpha_1 = \lambda \sqrt{6_0/E}$, A, B : 積分常数

$$\left. \begin{aligned} \text{応力状態 B ; } \frac{d \bar{y}_2}{d \bar{x}_2} &= \sqrt{C^2 - V^2} - \eta \\ \bar{x}_2 &= - \frac{2\alpha_2}{C^2} \left\{ \frac{\sqrt{C^2 - V^2}}{V^2} + \frac{1}{2C} \log \frac{C + \sqrt{C^2 - V^2}}{C - \sqrt{C^2 - V^2}} \right\} + D \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに $V^2 = 2\alpha_2 / [\beta_2 - (\bar{y}_2 + \eta \bar{x}_2)]$, $\alpha_2 = (1-g)^3 6_g \lambda^2 / 54 g^2 E$

$\beta_2 = (1-g)/2g$, C, D : 積分常数

$$\left. \begin{aligned} \text{応力状態 C ; } \frac{d \bar{y}_3}{d \bar{x}_3} &= \sqrt{F + W} - \eta \\ \bar{x}_3 &= -1/12 \alpha_3^2 \cdot (W - 2F) \sqrt{W + F} + G \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに $W = 4\alpha_3 \sqrt{\beta_3 - (\bar{y}_3 + \eta \bar{x}_3)}$, $\alpha_3 = 6_g \lambda^2 / 12 \sqrt{3} g E$

$\beta_3 = (1-g^2)/4g$, F, G : 積分常数

3. たわみ曲線形の決定

図-2のごとき載荷状態において変形した部材の材軸方向の応力状態を, 断面応力状態A, B, Cの組合せにより分類すれば次の3種類となる。

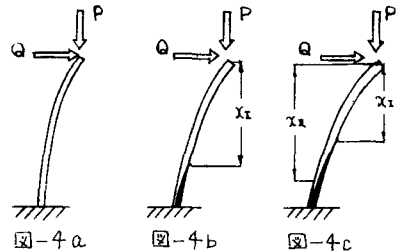
応力状態Ⅰ; 材全長にわたって各断面の応力状態がAである

る状態 (図-4a 参照)

応力状態Ⅱ; $0 < x < x_I$ および $x_I < x < 1$ における各断面の応力状態がそれぞれAおよびBである状態 (図-4b 参照)

応力状態Ⅲ; $0 < x < x_I$, $x_I < x < x_{II}$, $x_{II} < x < 1$ における各断面の応力状態がそれぞれA, B および C である状態 (図-4c 参照)

上記の各応力状態に対するたわみ曲線形は, 式(8), 式(9)および式(10)にそれぞれ境界条件を適用することにより以下のごとく決定される。



(1) 応力状態Ⅰ 図-4a を参照すれば境界条件は $(\bar{y}_1)_{\bar{x}_1=0}=0$ および $d\bar{y}/d\bar{x}_1)_{\bar{x}_1=1}=0$ となりこれを式(8)に代入すれば積分定数A, Bが次のごとく求められる。

$$A = n/\cos \alpha_1, \quad B = 0$$

最大たわみは式(8)において $\bar{x}_1 = 1$ とおけば次式よりえられる。

$$\bar{y}_{m1} = n/d_1 \cdot \tan \alpha_1 - n \quad (11)$$

次に図-2に示すとき荷重をうける矩形断面部材の圧縮縁および引張縁を降伏させる時の断面モーメントをそれぞれ M_{yI}, M_{yII} とすれば、これらは文献(4)よりそれぞれ $M_{yI} = (1-g) M_y$, $M_{yII} = (1+g-2g^2) M_y$ ($M_y = b h^2 \sigma_y / 6$: 降伏モーメント)であり、応力状態Ⅰの最大たわみ $\bar{y}_{m1}$ の限界値は $0 < M_{yI} < M_{yII}$ の条件より次式で表わされる。

$$0 < \bar{y}_{m1} < (1-g)/6g - n = \bar{y}_1 \quad (12)$$

(2) 応力状態Ⅱ 図-4b を参照すれば境界条件は $(\bar{y}_1)_{\bar{x}_1=0}=0$, $(\bar{y}_1)_{\bar{x}_1=\bar{x}_2} = (\bar{y}_2)_{\bar{x}_2=\bar{x}_1}$, $d\bar{y}_1/d\bar{x}_1)_{\bar{x}_1=\bar{x}_2} = d\bar{y}_2/d\bar{x}_2)_{\bar{x}_2=\bar{x}_1}$ であり、これらを式(8)および式(9)に代入すれば、各積分定数はそれぞれ次式のごとく求められる。

$$A^2 = C^2 + U_1^2 - V_1^2, \quad B = 0$$

$$D = 1 + 2\alpha_2/C^2 \cdot \{ n/(C^2 - n^2) + \log[(C+n)/(C-n)]/2C \}$$

ここに $U_1 = (1-g)/6g \cdot \alpha_1$, $V_1 = \sqrt{12g\alpha_2/[6g\beta_2 + g - 1]}$ であり、またCは次式により決定される。

$$\psi_2 = \left(\sin^{-1} \frac{U_1}{A} - \alpha_1 \right) C^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \left\{ \frac{\sqrt{C^2 - V_1^2}}{V_1^2} - \frac{n}{C^2 - n^2} + \frac{1}{2C} \log \frac{(C-n)(C+\sqrt{C^2 - V_1^2})}{(C+n)(C-\sqrt{C^2 - V_1^2})} \right\} = 0 \quad (13)$$

最大たわみは式(9)にて $\bar{x}_2 = 1$ とおけば次式よりえられる。

$$\bar{y}_{m2} = \beta_2 - 2\alpha_2/(C^2 - n^2) - n \quad (14)$$

応力状態Ⅱの最大たわみ $\bar{y}_{m2}$ の限界値は $M_{yI} < M_{y2} < M_{yII}$ の条件より次式にて表わされる。

$$\bar{y}_1 < \bar{y}_{m2} < (1+g-2g^2-f)/6g = \bar{y}_1 \quad (15)$$

(3) 応力状態Ⅲ 図-4cを参照すれば境界条件は $(\bar{y}_1)_{\bar{x}_1=0}=0$, $(\bar{y}_1)_{\bar{x}_1=\bar{x}_2} = (\bar{y}_2)_{\bar{x}_2=\bar{x}_1}$, $d\bar{y}_1/d\bar{x}_1)_{\bar{x}_1=\bar{x}_2} = d\bar{y}_2/d\bar{x}_2)_{\bar{x}_2=\bar{x}_1}$, $(\bar{y}_2)_{\bar{x}_2=\bar{x}_3} = (\bar{y}_3)_{\bar{x}_3=\bar{x}_2}$, $d\bar{y}_2/d\bar{x}_2)_{\bar{x}_2=\bar{x}_3} = d\bar{y}_3/d\bar{x}_3)_{\bar{x}_3=\bar{x}_2}$, $d\bar{y}_3/d\bar{x}_3)_{\bar{x}_3=1}=0$ でありこれらを式(8)式(9)および式(10)に代入すれば各積分定数はそれぞれ次式のごとく求まる。

$$A^2 = C^2 + U_1^2 - V_1^2, \quad B = 0$$

$$D = \frac{1}{d_1} \sin^{-1} \frac{U_1}{A} + \frac{2\alpha_2}{C^2} \left\{ \frac{\sqrt{C^2 - V_1^2}}{V_1^2} + \frac{1}{2C} \log \frac{C + \sqrt{C^2 - V_1^2}}{C - \sqrt{C^2 - V_1^2}} \right\}$$

$$F = C^2 - V_{II}^2 - W_{II}, \quad G = 1 + (n^2 - 3F) n / 12\alpha_3^2$$

ここに $V_{II} = V_1/\sqrt{1-g}$, $W_{II} = V_{II}^2/2$ であり残りの積分定数Cは次式により決定される。

$$\psi_3 = \left\{ \sin^{-1} \frac{U_1}{A} - \alpha_1 - \frac{\alpha_1}{12\alpha_3^2} \left[n(n^2 - 3F) - (W_{II} - 2F)\sqrt{W_{II} + F} \right] \right\} C^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \left\{ \frac{\sqrt{C^2 - V_1^2}}{V_1^2} - \frac{\sqrt{C^2 - V_{II}^2}}{V_{II}^2} + \frac{1}{2C} \log \frac{(C + \sqrt{C^2 - V_1^2})(C - \sqrt{C^2 - V_{II}^2})}{(C - \sqrt{C^2 - V_1^2})(C + \sqrt{C^2 - V_{II}^2})} \right\} = 0 \quad (16)$$

最大たわみは式(10)において $\bar{x}_3 = 1$ とおけば次式よりえられる。

$$\bar{y}_{m3} = \beta_3 - n - (n^2 + V_{II}^2 + W_{II} - C^2)/16\alpha_3^2 \quad (17)$$

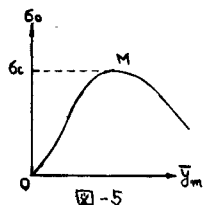
応力状態Ⅲの最大たわみ $\overline{y_{m3}}$ の限界値は $M_{x=1} > M_{yII}$ の条件より次式にて表わされる。

$$\overline{y_{m3}} > \overline{y_{II}} \quad (18)$$

4. 限界軸応力の決定

与えられた機荷重および細長比に対する最大たわみ一軸応力の関係は図-5のごとき曲線となり限界軸応力 σ_c はこの曲線の頂点Mの軸応力により定義され、理論的には、応力状態Ⅰに対しては $d\sigma_c/dy_m=0$ により、また応力状態ⅡあるいはⅢに対しては、M点にて式(13)および式(16)で表わされる積分常數決定式が明らかに重根をとることを考慮して、それぞれ式(13)および $\partial\psi_2/\partial C=0$ 、あるいは式(16)および $\partial\psi_3/\partial C=0$ を連立に解くことにより決定される。まず、応力状態Ⅰの場合には、式(11)は式(12)の範囲において単調増加函数となり極値を持たず、かかる応力状態では不安定現象は発生しないことが確認される。次に応力状態Ⅱの場合には、式(13)を積分常數Cで偏微分することにより、限界軸応力決定式が次のごとく誘導され、式(13)と連立に解けば所要の限界軸応力値が決定される。

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial C} = 2\alpha_1\alpha_2 \left\{ \frac{3V_I^2 - C^2}{U_I^2\sqrt{C^2 - V_I^2}} - \frac{3}{2C} \log \frac{(C-n)(C+\sqrt{C^2 - V_I^2})}{(C+n)(C-\sqrt{C^2 - V_I^2})} + \frac{n(5C^2 - 3n^2)}{(C^2 - n^2)^2} \right\} - \frac{U_I C^4}{A^2 \sqrt{A^2 - U_I^2}} = 0 \quad (19)$$



また応力状態Ⅲの場合には式(16)を積分常數Cで偏微分することにより限界軸応力決定式が次式でえられ、同じく式(16)と併用すればよい。

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial C} = 2\alpha_1\alpha_2 \left\{ \frac{3V_I^2 - C^2}{U_I^2\sqrt{C^2 - V_I^2}} - \frac{3V_{II}^2 - C^2}{U_{II}^2\sqrt{C^2 - V_{II}^2}} - \frac{3}{2C} \log \frac{(C+\sqrt{C^2 - V_I^2})(C-\sqrt{C^2 - V_{II}^2})}{(C-\sqrt{C^2 - V_I^2})(C+\sqrt{C^2 - V_{II}^2})} \right\} + \left\{ \frac{\alpha_1}{12d^3} \left[6n + \frac{W_{II} - 2F}{\sqrt{W_{II} + F}} - 4\sqrt{W_{II} + F} \right] - \frac{U_I}{A^2 \sqrt{A^2 - U_I^2}} \right\} C^4 = 0 \quad (20)$$

いま例として、 $f=0.2, 0.4$ で $\lambda=20.0, 60.0, 100.0$ に対する限界軸応力を算定すれば表-1のごとき結果となる。また、たわみ形を正弦曲線に仮定する近似解は文献(2)の式(7)および式(10)において $\lambda=2\lambda$ とおけばよく、その結果を表-1の括弧内に示した。

f \ λ	20	60	100
0.2	0.86 (0.83)	0.32 (0.29)	0.12 (0.11)
0.4	0.74 (0.69)	0.26 (0.23)	0.10 (0.09)
ただし $G_y=3.6 \times 10^3$ (kg/cm ²), $E=2.1 \times 10^6$ (kg/cm ²)			

5. 結論 表-1より明らかなごとく近似解を厳密解と比較

表-1 限界軸応力値 σ_c/σ_y

すれば、その誤差は4~11%と小さく、また近似解は f, λ の値にかかわらず常に厳密解に対して低い値となり安全側にあるので実用的には近似解を採用しても差支えないことが認められる。

参考文献

- (1) K. Jezeck "Die Tragfähigkeit" des gleichmäßig querbelasteten Druckstabes aus einem ideal-plastischen." Stahlbau 1935.
- (2) 山崎, 速水 "横荷重を受ける部材に対する弾塑性座屈の近似解法" 第21回土木学会年次学術講演会講演概要, 昭和44年5月
- (3) J. Oxfort "Über die Begrenzung der Traglast eines statisch unbestimmten liegesteifen Stahlwerkes aus Baustahl durch das Instabilwerden des Gleichgewichtes" Stahlbau 1961
- (4) 山崎, 永田, 後藤 "一定軸力と漸増曲げモーメントを受ける連続梁の弾塑性解析" 第21回土木学会年次学術講演会講演概要, 昭和44年5月