

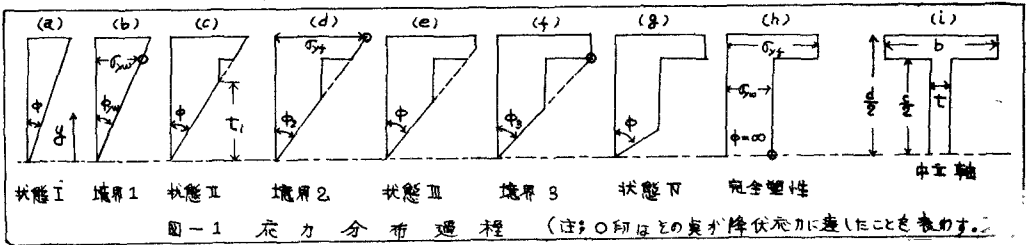
Hybrid I 形ばりの弾塑性解析

九州大学 正員 山崎徳也
 “ 学生員 太田俊昭
 “ 学生員 〇片山忠

1. 諸言 Hybrid I 形ばりは、材料の経済性を考慮して cost 高の High-Tension Steel を曲げモーメントに最も大きく抵抗するフランジ部分に用い、ウェブには Low-Tension Steel を用いることにより、効率を高める一種の混成梁である。本論文は、Hybrid I 形ばりについて、弾塑性解析を試み、もってその力学的特性を、全断面が Low-Tension Steel の普通 I 形ばりのそれと比較検討したものである。

解析骨子は、ときに著者が提示した実用補正エネルギー法をそのまま準用した。一般に Hybrid I 形ばりの特性は、フランジとウェブの降伏応力の比によって著しく異なるので、本論文では後述のごとく三種類の M- ϕ 近似直線を導入し、それぞれの場合のたわみを算定して、厳密解および塑性設計法による数値と比較し、精度の吟味を行った。

2. 曲げモーメントと曲率の関係



弾塑性解析の慣用仮定にしたがって、漸進曲げモーメントを受けて弾性状態より弾塑性状態を経て、塑性状態に至るまでの Hybrid I 形ばりの断面に生じる応力分布過程を示せば図-1のごとくなる。これらの各状態における曲げモーメントと曲率の関係はそれぞれ次のごとく求められる。すなわち図-1(a)の弾性状態においては周知のごとく Hooke の法則より次式となる。 $M = EI \phi$ -----(1)

次に図-1(c), (e) および (g) に示す弾塑性状態 II, III および IV における M- ϕ 関係式は、それぞれ次のごとく求められる。

状態 II (図-1(c) 参照); いまウェブの一次モーメントおよびフランジの二次モーメントをそれぞれ Z_w , I_f , また断面寸法を図-1(d)のごとく示せば、M- ϕ 関係式は次のごとくえられる。

$$M = 2 \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2} + t} \sigma_f y dA + 2 \int_0^{\frac{d}{2}} \sigma_{yw} y dA - 2 \int_0^{t_f} (\sigma_{yw} - \sigma_f) y dA \quad \text{ただし } \sigma_{yw}: \text{ウェブの降伏応力} \quad \text{-----(2)}$$

応力と曲率の関係は $\sigma = E \phi y$ であり、また図-1(c)より $t_f = \sigma_{yw} / E \phi$ となるゆえ、これらの関係を表(2)に代入して $M = 2 E \phi \left[\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2} + t} y^2 dA + 2 \sigma_{yw} \int_0^{\frac{d}{2}} y dA - 2 \sigma_{yw} \int_0^{t_f} (1 - \frac{y}{t_f}) y dA \right]$

$$\text{とさらに上式を整理して次式となる。} \quad M = EI_f \phi + \sigma_{yw} Z_w - \sigma_{yw}^3 t_f / 3 E^2 \phi^2 \quad \text{-----(3)}$$

状態 III (図-1(e) 参照); 状態 II の場合と同様の手法を用いれば所要の M- ϕ 関係式は次のごとくなる。

$$M = Z_f \cdot \sigma_{yf} + Z_w \cdot \sigma_{yw} - (\sigma_{yw}^3 t_f + \sigma_{yf}^3 b) / 3 E^2 \phi^2 + b c^2 / 12 \times (3 \sigma_{yf} - E \phi) \quad \text{-----(4)}$$

ただし、 σ_{yf} : フランジの降伏応力, Z_f : フランジの一次モーメント

状態Ⅱ(図-1(8)参照); 状態Ⅲと全く同様な考察を行えば、結局Ⅱ-中肉係数は次式で表わされる。

$$M = \sigma_{yf} \cdot Z_f + \sigma_{yw} \cdot Z_w - \sigma_{yw}^3 t / 3 E^2 \phi^2 \quad \text{----- (5)}$$

また、完全塑性モーメント M_p は、式(5)において $\phi \rightarrow \infty$ とすれば、次式で与えられる。

$$M_p = \sigma_{yf} \cdot Z_f + \sigma_{yw} \cdot Z_w \quad \text{----- (6)}$$

次に図-1(6)の境界Ⅰに示すモーメント M_{yw} は、式(4)において $\phi = \phi_{yw}$ とおけば次のごとく表わされる。

$$M_{yw} = EI \phi_{yw} = \sigma_{yw} \cdot S \quad \text{ただし、} \phi_{yw}: \text{境界Ⅰの曲率, } \beta = I / S^2 \quad \text{----- (7)}$$

フランジとウェブの降伏応力の比 $\sigma_{yf} / \sigma_{yw}$ を R で表わし、これを降伏比と呼ぶことにする。

さて、以後の解析を容易ならしめるために式(1), (3), (4), (5), (6) のⅡ-中肉係数を式(7)の M_{yw} で除して無次元化すれば、それぞれ次式をうる。

状態Ⅰ; $m = \phi \quad \text{----- (8)}$

状態Ⅱ; $m = \frac{Z_w}{S} + \frac{I_f}{I} \phi - \frac{Z_w}{3S} \cdot \frac{1}{\phi^2} \quad \text{----- (9)}$

状態Ⅲ; $m = \frac{Z_w + Z_f R + Z_a R}{S} - \frac{2 Z_a}{3 S} \phi - \frac{Z_w + Z_a R^3}{3 S} \cdot \frac{1}{\phi^2} \quad \text{----- (10)}$

状態Ⅳ; $m = \frac{Z_w + Z_f R}{S} - \frac{Z_w}{3 S} \cdot \frac{1}{\phi^2} \quad \text{----- (11)}$

完全塑性モーメント; $m_p = \frac{Z_w + Z_f R}{S} \quad \text{ただし、} m = M / M_{yw}, \phi = \phi / \phi_{yw}, Z_a = b c^2 / 4 \quad \text{----- (12)}$

いま、断面諸量を $d = 30 \text{ cm}$, $b = 15 \text{ cm}$, $c = 27.4 \text{ cm}$, $t = 0.8 \text{ cm}$ とし、 R が 1.5, 2.0 および 3.0 の各場合に就いて式(8)~(12)より $m-\phi$ 図を描けば図-2のごとなる。

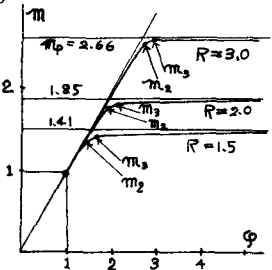


図-2 $m-\phi$ 曲線

3. $m-\phi$ 近似直線 文献(1)の手法に準じて、近似直線の勾配を規制する K をエネルギー等置の条件より算定する。すなわち、図-3において $m-\phi$ 曲線における面積 ABEFGCDA と近似直線による面積 ABCDA を等置して、近似直線 BC(亦一種近似直線と名づける)の勾配 $1/K_1$ を決定すれば次式をうる。

$$K_1' = \frac{\frac{1}{2} - \frac{Z_f R}{S} + \frac{Z_a R^2}{S} (d/c - 1)}{\frac{1}{2} (m_p - 1)^2} \quad \text{----- (13)}$$

一方、図-2より明らかなごとく R が比較的小さい場合は、フランジが降伏を始めるときの境界Ⅱのモーメント値 m_2 およびこれが降伏し終るときの境界Ⅲのモーメント値 m_3 までの $m-\phi$ 曲線がほぼ直線変化を示すので、以下に述べる二種類の近似直線を別途導入する。すなわち図-3においてそれぞれ弾性直線を m_2, m_3 まで延長し、それ以後の $m-\phi$ 曲線をそれぞれ直線 EH(亦一種近似直線) HJ (亦一種近似直線)を置換する。それぞれ近似直線の勾配 $1/K_2, 1/K_3$ は同じくエネルギー等置の条件より次のごとき値となる。

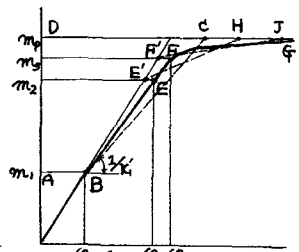


図-3 近似直線

$$K_2' - 1 = \frac{\frac{Z_w}{S} - \frac{m_2^2}{2} + \frac{Z_b R^2 c}{S d} - \frac{Z_a R^2}{S}}{\frac{1}{2} (m_p - m_2)} \quad \text{----- (14)}$$

$$K_3' - 1 = \frac{\frac{Z_w}{S} - \frac{m_p^2}{2} + \frac{Z_b \cdot R^2 \cdot c}{S \cdot d} - \frac{Z_a \cdot R^2}{S}}{\frac{1}{2}(m_p - m_3)} \quad \text{ただし, } Z_b = bd^2/4 \quad (15)$$

以上三種類の近似直線の方程式は、それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \text{カ一様近似直線;} & \quad \varphi = (x_1 + 1)m - K_1, \quad \text{ただし, } K_1 = K_1' - 1 \\ \text{キ二様近似直線;} & \quad \varphi = (x_2 + 1)m - K_2 \cdot m_2, \quad \text{ただし, } K_2 = K_2' - 1 \\ \text{ク三様近似直線;} & \quad \varphi = (x_3 + 1)m - K_3 \cdot m_3, \quad \text{ただし, } K_3 = K_3' - 1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

4. 計算例 上記3において求めた三種類の近似直線を用いて、図4に示す両端固定Hybrid工形ばりに中央集中荷重Pが作用するときの中央変位の求め方を算定し、塑性設計法による解および厳密解と比較する。まずカ一様近似直線によるたわみ δ_{K1} は次のごとく求られる。

$$\delta_{K1} = \left(\phi \frac{\partial M}{\partial P} dx = \phi_{yw} M_{yw} \left(|y_1| \cdot \frac{\partial |m_1|}{\partial P} dx = \frac{M_{yw} \cdot l^2}{EI} \left(|y_1| \cdot \frac{\partial |m_1|}{\partial P} dx \right) \right) \quad (17)$$

荷重条件より任意点のモーメントは $M = \frac{P}{2}x - \frac{P \cdot l}{8}$ で与えられるので、これを $M_{yw} = P_y \cdot l/8$ で除して無次元化すれば次式をうる。

$$m = 4P^*X - P^*, \quad \text{ただし, } P^* = P/P_y, X = x/l, P_y: \text{弾性限界時の荷重,} \quad (18)$$

よって式(17)に式(18)および式(16)を代入のうえ整理すれば次式をうる。

$$\begin{aligned} \delta_{K1} &= \frac{M_{yw} \cdot l^2}{8EI} \int |y_1| \cdot \frac{\partial |m_1|}{\partial P^*} dX = \frac{M_{yw} \cdot l^2}{8EI} \left[\int_{-P^*}^{P^*} |y_E| \cdot \frac{\partial |m_1|}{\partial P^*} + \int_P (|y_E| - |y_1|) \cdot \frac{\partial |m_1|}{\partial P^*} \right] \\ &= \frac{M_{yw} \cdot l^2}{24EI} \left\{ P^* + K_1 \cdot P^* \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{P^*} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{P^*} \right)^3 \right\} \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

ただし、添字E,Pはそれぞれ弾性領域 ($|m_1| < 1$) および塑性領域 ($1 \leq |m_1| \leq m_p$) を表す。

次にキ二様およびク三様近似直線によるたわみ δ_{K2} , δ_{K3} を同様の手法によって求めれば、それぞれ次式で与えられる。

$$\delta_{K2} = \frac{M_{yw} \cdot l^2}{24EI} \left[P^* + K_2 \cdot P^* \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{m_2}{P^*} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{m_2}{P^*} \right)^3 \right\} \right] \quad (20)$$

$$\delta_{K3} = \frac{M_{yw} \cdot l^2}{24EI} \left[P^* + K_3 \cdot P^* \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{m_3}{P^*} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{m_3}{P^*} \right)^3 \right\} \right] \quad (21)$$

ここで降伏比Rを1.5, 2.0および3.0にとり、式(19), (20)および式(21)よりたわみ δ_{K1} , δ_{K2} , および δ_{K3} をそれぞれ算定し、その結果を図-5

に示した。ただし、図中の厳密解は、式(17)において φ を厳密 $m-\varphi$ 曲線より忠実に求めた数値積分したものである。

図-5より、近似直線によるたわみの誤差は、崩壊荷重時にあり、たかだか1%であり塑性設計法による誤差が5~10%に達するの比べて極めて精度の高い実用解と云える。

一方、中央荷重値に対する本法のたわみの誤

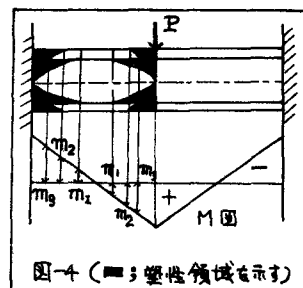


図-4 (■: 塑性領域を示す)

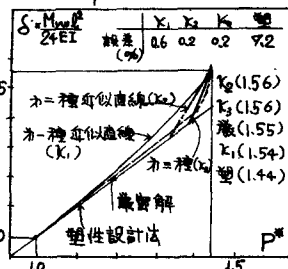


図-5(a) $P^*-\delta$ 曲線 ($R=1.5$)

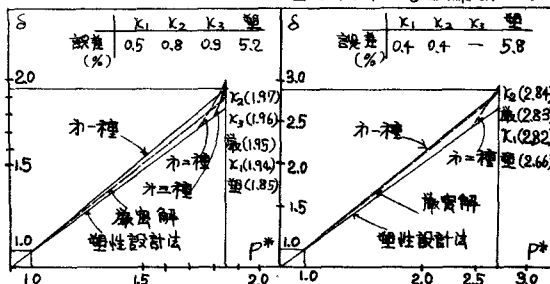


図-5(b) $P^*-\delta$ 曲線 ($R=2.0$) 図-5(c) $P^*-\delta$ 曲線 ($R=3.0$)

差は、崩壊荷重時のそれと比べてかなり大きく、またRによりかなり左右されるが、Rが1~2の範囲でホニ種あるいはホニ種近似直線を、Rが2より大きい場合にはホニ種近似直線をそれぞれ用いれば、誤差をいずれも2~3%以内にとめることが種々の計算より判明した。

5. Hybrid工形ばりの特性について 降伏比Rと降伏荷重および降伏荷重時のたわみ、あるいはRと崩壊荷重および崩壊荷重時のたわみの関係をそれぞれ前記の例についてホニ種近似直線を用いて考察し、全断面が等しく降伏応力 σ_{yw} の鋼材よりなる普通工形ばりと比較吟味した。すなわちHybrid工形ばり、普通工形ばりの荷重値ならびにたわみをそれぞれ P, δ および $\bar{P}, \bar{\delta}$ で区別し、さらに両者の荷重およびたわみの比を $\bar{P}=P/\bar{p}$ および $\bar{\delta}=\delta/\bar{\delta}$ とあければ、それぞれ次のごとき関係式が成立する。

まず降伏荷重 $\bar{P}$ 、崩壊荷重 $\bar{P}_p$ についてはそれぞれ次式となる。

$$P_y = 8 M_{yy} / l, \quad \bar{P}_y = 8 M_{yy} / l \quad \therefore \bar{P}_y = P_y / \bar{P}_y = d/c \quad \text{--- (22)}$$

$$P_p = P_y \cdot P^* = \frac{8 \sigma_{yw}}{l} (Z_w + R Z_f), \quad \bar{P}_p = \bar{P}_y \cdot \bar{P}_p^* = \frac{8 \sigma_{yw}}{l} \cdot Z \quad \therefore \bar{P}_p = Z_w/Z + Z_f \cdot R/Z \quad \text{--- (23)}$$

ただし、 $P_p^* = m_p$ 、 $\bar{P}_p^* = \bar{m}_p$ はそれぞれHybrid工形ばりおよび普通工形ばりの無次元化した完全塑性モーメント、 M_{yy} は普通工形ばりの降伏モーメント、またZは断面一次モーメントである。

次に降伏荷重時のたわみ δ_y は弾性計算より次のごとくなる。

$$\delta_y = M_{yw} \cdot l^2 / 24 EI, \quad \bar{\delta}_y = M_{yy} \cdot l^2 / 24 EI \quad \therefore \bar{\delta}_y = \delta_y / \bar{\delta}_y = d/c \quad \text{--- (24)}$$

さらに崩壊荷重時のたわみ $\bar{\delta}_p$ は式(19)において $P^* = m_p$ とあければ次式となる。

$$\bar{\delta}_p = \frac{\delta_p}{\bar{\delta}_p} = \frac{d}{c} \left[m_p + k_1 \cdot m_p \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{m_p} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_p} \right)^3 \right\} \right] / \left[\bar{m}_p + k_1 \cdot \bar{m}_p \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\bar{m}_p} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{m}_p} \right)^3 \right\} \right] \quad \text{--- (25)}$$

ただし、 $k_1 = 1/(2+1)$ ；普通工形ばりのホニ種近似直線の勾配

以上の諸式を図示すれば図-6のごとくなる。さて図-6の結果を前記図-2のm-φ曲線および図-5の P^* -δ曲線と組合して論ずれば、結局、以下の諸点をHybrid工形ばりの特徴としてあげることができよう。

- i) m-φ曲線よりみることくHybrid工形ばりは、ウェッジ降伏後も弾性的挙動を示し、フランジ外縁の降伏とともに曲げ剛性を3分の2の塑性特性を顕著に表し、フランジが降伏し終るとともに急速に完全塑性状態に移行する。この傾向はR値が大きくなるほど著しくなる。
- ii) たわみはフランジの降伏が終るまで、ほぼ直線変化をするがそれ以後急増し、R値が大きいくほどその直線変化の範囲は増大し、相対的にフランジ降伏終了以後のたわみの増分は減少する。
- iii) 図-6より降伏時の $\bar{P}_y, \bar{\delta}_y$ は、いづれもRが4/3より小なる部分を除けばd/cとなり、Rの変化に無関係であるのに対し、崩壊時の $\bar{P}_p, \bar{\delta}_p$ は両者ともRにはほぼ直線的に比例して増大する。

6. 結論 本論文はHybrid工形ばりの弾塑性解析を行い、その特性を理論的考察したもので、5.で指摘したごとく、Hybrid工形ばりはR値の増加とともに弾性的特性を著しく増大する。しかし、ウェッジの常時降伏に伴う、高応力疲労や局部座屈などの諸現象が大きな問題として介在するゆえ、必ずしも塑性設計がRの大きなHybrid工形ばりの解析に最適であると即断することは極めて危険と云える。

本研究は文部省科学研究費の補助を受けた、記して謝意を表する。

参考文献 (1) 山崎太田石川；補正工形梁による直線材の弾塑性解析，土木学会論文集第134号，1966.10
 (2) R.W.Frost & C.G.Schelling；Behavior of Hybrid Beam subjected To Static load，Proceedings of A.S.C.E，vol.90.NO.3, 1964