

軸方向力を考慮した連続円弧アーチの弾塑性解析

九州大学 正員 山崎徳也

学生員 石川信隆

1. 緒言 鋼構造物の弾塑性挙動を解明せんがため、最近各方面で数多くの実験または理論的研究が活発に行われているが、著者らもまたエネルギー法的観点からこれを理論的に究明すべく一連の研究を行ってきた。すなわちその一研究として昨年の本大会で弾塑性領域を包含したうえで曲げと軸力を同時に考慮した補正エネルギー⁽³⁾式を導き、これを用いて固定円弧アーチの弾塑性挙動を厳密に考察した。本研究はさらに円弧アーチに対する軸力をも考慮した弾塑性たわみ角式を誘導提示し、もって矩形断面をもつ連続鋼円弧アーチの弾塑性解析を弾性解析における変形法に準じて行ないうるごとくしたもので、その演算法は数値積分に基づく繰り返し試算により未知の変形量を求めんとするものである。

2. 円弧アーチに対する弾塑性たわみ角式の誘導

いま矩形等断面アーチを取り扱うものとするは、弾塑性領域を包含し曲げと軸力を考慮した補正エネルギー⁽²⁾は次式で与えられる。

$$U = \int_{E+P_1+P_2} U_E ds + \int_{P_1} (U_{P_1} - U_E) ds + \int_{P_2} (U_{P_2} - U_E) ds \quad \dots (1)$$

ここに U_E , U_{P_1} , U_{P_2} はそれぞれ単位長さ当りの弾性、第1および第2弾塑性領域における補正エネルギーで次のごとく示され、また積分記号の添字 E , P_1 , P_2 はそれぞれ弾性、第1および第2弾塑性領域の拱軸方向の長さを示す。すなわち

$$U_E = \frac{M_y^2}{2EI} (m^2 + 3n^2), \quad U_{P_1} = \frac{M_y^2}{2EI} \left[\frac{3(1-m)^2}{3(1-m)-|m|} + 3(2m-1) \right], \quad U_{P_2} = \frac{M_y^2}{2EI} (3 - 2\sqrt{3-3m^2-2|m|})$$

$m = M/M_y$, $n = N/N_y$, M_y : 降伏曲げモーメント, N_y : 軸力の双による全断面降伏力

(1) 弾塑性領域が生ずる場合

図-1のごとく円弧アーチ部材ABを考え、両端A, Bおよび途中のC点近傍にそれぞれ $A'A''$, $C'C'$, $D'D'$, $B''B'$ および $A'A'$, $C'D'$, $B'B'$ の第1および第2弾塑性領域が生ずるものとするは、部材ABに与えられる補正エネルギーは式(1)より次式となる。

$$U = \int_0^{\theta_1} U_E r d\theta + \int_{P_1} (U_{P_1} - U_E) r d\theta + \int_{P_2} (U_{P_2} - U_E) r d\theta \quad \dots (2)$$

ただし P_1 は図-1より $-\theta_1 \sim -\theta_2$, $-\theta_3 \sim 0$, $\theta_4 \sim \theta_5$, $\theta_6 \sim \theta_7$, また P_2 は $-\theta \sim \theta_1$, $0 \sim \theta_4$, $\theta_7 \sim \theta$ の積分範囲を示す。

一方任意点の曲げモーメント M および軸力 N は図-1を参照して次式のごとく表わされる。

$$M/M_y = m = (1-\alpha)m_{AB}/l - \alpha m_{AB}/l - K H \cdot y/l + m_0, \quad N/N_y = n = H \cos \theta - \sqrt{V} \sin \theta + n_0 \quad \dots (3)$$

ただし $m_{AB} = M_{AB}/M_y$, $m_{BA} = M_{BA}/M_y$, $H = H/N_y$, $V = V/N_y$, $V = -(M_{AB} + M_{BA})/l$, $K = N_y l/M_y$, また m_0 および n_0 は部材ABを単純アーチと見做したときの荷重による曲げモーメントおよび軸力をそれぞれ M_y および N_y で割った値を示す。

式(2)に式(3)を代入したうえで変分原理を適用すれば両端A, Bにおける切線角 θ_A , θ_B および部材伸び Δl がそれぞれ求められ、積分演算は式(2)の弾性項のみを行なって結局次式となる。

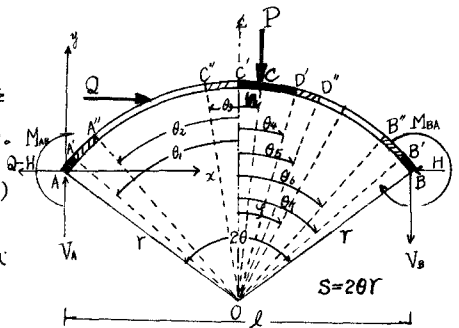


図-1

$$\left. \begin{aligned} \tau_A &= \frac{\partial U}{\partial M_{AB}} = (a_1 m_{AB} + b_1 m_{BA} + c_1 H + L_1 + D_1 + E_1) \frac{M_P}{EI} \\ \tau_B &= \frac{\partial U}{\partial M_{BA}} = (a_2 m_{AB} + b_2 m_{BA} + c_2 H + L_2 + D_2 + E_2) \frac{M_P}{EI} \\ \Delta l &= \frac{\partial U}{\partial H} = (a_3 m_{AB} + b_3 m_{BA} + c_3 H + L_3 + D_3 + E_3) \frac{M_P}{EI} l \end{aligned} \right\} (4)$$

ここに係数 $a_1, b_1, \dots, c_3$ および L_1, L_2, L_3 は軸力を考慮した弾性たわみ角式の係数および荷重項の1種に一致し、さらに弾塑性項の1種である $D_1, D_2, \dots, E_3$ はそれぞれ表-1に示すとき値となる。

表 - 1

a_1	$(2\theta + \theta \cos^2 \theta - \cot \theta)/4 + 3(\theta - \sin \theta \cos \theta)/K^2$	a_2	$= b_1$	a_3	$= c_1/K$
b_1	$(-2\theta + \theta \cos^2 \theta - \cot \theta)/4 + 3(\theta - \sin \theta \cos \theta)/K^2$	b_2	$= a_1$	b_3	$= c_1/K$
c_1	$K(\theta \cos \theta - \sin \theta)/2 \sin \theta$	c_2	$= -c_1$	c_3	$K_0^2(\theta - 3 \sin \theta \cos \theta + 2\theta \cos^2 \theta)/K + 3(\theta + \sin \theta \cos \theta)/K$
L_1	$\int_0^\theta \{m_0(t-x)/l + 3n_0 \sin y/K\} dy$	L_2	$\int_0^\theta \{m_0(-x/l) + 3n_0 \sin y/K\} dy$	L_3	$\int_0^\theta \{m_0(-y/l) + 3n_0 \cos y/K\} dy$
D_1	$\int_0^1 \{m_{p1}(l-x)/l + n_{p1} \sin y/K\} dy$	D_2	$\int_0^1 \{m_{p1}(-x/l) + n_{p1} \sin y/K\} dy$	D_3	$\int_0^1 \{m_{p1}(-y/l) + n_{p1} \cos y/K\} dy$
E_1	$\int_0^1 \{m_{p2}(l-x)/l + n_{p2} \sin y/K\} dy$	E_2	$\int_0^1 \{m_{p2}(-x/l) + n_{p2} \sin y/K\} dy$	E_3	$\int_0^1 \{m_{p2}(-y/l) + n_{p2} \cos y/K\} dy$
$n_{p1} = 4(1-\pi^2)/[3(1-\pi) - \pi]^2 - \pi $, $n_{p2} = 1/\sqrt{3-3\pi^2-2 \pi } - \pi $					
$\pi_{p1} = 12(1-\pi)^2(2\pi-2- \pi)/[3(1-\pi)- \pi]^2 + 3(1-\pi)$, $\pi_{p2} = 3\pi(1/\sqrt{3-3\pi^2-2 \pi } - 1)$					

式(4)に $\tau_A = \theta A - R$, $\tau_B = \theta B - R$, 関係比 $k = (I/S)/(I_0/S_0)$, $\phi_A = 2EI_0 \theta A/M_P S_0$, $\phi_B = 2EI_0 \theta B/M_P S_0$, $\psi = -6EI_0 R/M_P S_0$, $\Delta l = 2EI_0 \Delta l/M_P S_0 l$ の置換(S_0 は標準長)を行なったのち, $D_1, D_2, \dots, E_3$ は弾塑性項に比べ微小なることに着目して左辺に移項し, m_{AB}, m_{BA}, H について連立に解けば, 所要の軸力を考慮した弾塑性たわみ角式がえられ, 次式のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= k(\alpha_{AB} \phi_A + \beta_{AB} \phi_B + \gamma_{AB} \psi - \delta_{AB} \Delta l) + C_{AB} + D_{AB} + E_{AB} \\ m_{BA} &= k(\beta_{AB} \phi_A + \alpha_{AB} \phi_B + \gamma_{AB} \psi + \delta_{AB} \Delta l) + C_{BA} + D_{BA} + E_{BA} \\ H &= k\{(\phi_B - \phi_A) \delta_{AB}/K + \lambda_{AB} \Delta l\} + N_{AB} + F_{AB} + G_{AB} \end{aligned} \right\} (5)$$

ここに係数 $\alpha_{AB}, \beta_{AB}, \dots, \lambda_{AB}$ および荷重項 C_{AB}, C_{BA}, N_{AB} さらに弾塑性項 $D_{AB}, E_{AB}, \dots, G_{AB}$ はそれぞれ次式より求められる。

$$\begin{aligned} \alpha_{AB} &= \theta(a_1 c_3 - c_1^2/K)/d, & \beta_{AB} &= -\theta(-b_1 c_3 + c_1^2/K)/d, & \gamma_{AB} &= \theta\{c_3(a_1 - b_1) - 2c_1^2/K\} \\ \delta_{AB} &= \theta c_1(a_1 + b_1)/3d, & \lambda_{AB} &= \theta(a_1^2 - b_1^2)/d, & d &= c_3(a_1^2 - b_1^2) - 2c_1^2(a_1 + b_1)/K \end{aligned}$$

$$\text{荷重項: } C_{AB} = -(L_1 \alpha_{AB} + L_2 \beta_{AB} - L_3 \delta_{AB})/\theta, \quad C_{BA} = -(L_1 \beta_{AB} + L_2 \alpha_{AB} + L_3 \delta_{AB})/\theta$$

$$N_{AB} = \{(L_1 - L_2) \delta_{AB}/K - L_3 \lambda_{AB}\}/\theta$$

$$\text{弾塑性項: } D_{AB} = -(D_1 \alpha_{AB} + D_2 \beta_{AB} - D_3 \delta_{AB})/\theta, \quad D_{BA} = -(D_1 \beta_{AB} + D_2 \alpha_{AB} + D_3 \delta_{AB})/\theta, \quad F_{AB} = \{(D_1 - D_2) \delta_{AB}/K - D_3 \lambda_{AB}\}/\theta$$

$$E_{AB} = -(E_1 \alpha_{AB} + E_2 \beta_{AB} - E_3 \delta_{AB})/\theta, \quad E_{BA} = -(E_1 \beta_{AB} + E_2 \alpha_{AB} + E_3 \delta_{AB})/\theta, \quad G_{AB} = \{(E_1 - E_2) \delta_{AB}/K - E_3 \lambda_{AB}\}/\theta$$

(2) 弾塑性領域に引き続き塑性ヒンジが生ずる場合

図-2(a)に示すごとくA端近傍の弾塑性領域に引き続き, 同端に塑性ヒンジ形成されるものとすれば, 完全塑性条件より $|m_{AB}| = m_{PA} = 1.5 \times (1 - \pi^2)$ が成立し, A端は一定の塑性曲げモーメント m_{PA} のもとに回転角を生じ式(5)は次式のごとく変形される。

$$\left. \begin{aligned} |m_{AB}| &= m_{PA} = 1.5(1 - \pi^2), & \pi_A &= N_A/N_P, & m_{PA} &= \text{A端の塑性曲げモーメント} \\ m_{BA} &= k(\alpha_{AB} \phi_B + \beta_{AB} \psi + \delta_{AB} \Delta l) + C_{BA} + D_{BA} + E_{BA} + \beta_{AB} m_{PA} \end{aligned} \right\} (6a)$$



(a) A端塑性ヒンジ

図 - 2

$$H = R \left[\delta_{AB} \left\{ (1 + \bar{\beta}_{AB}) \phi_B + \gamma_{AB} (\psi_{AB} / \alpha_{AB}) \right\} / K + \bar{N}_{AB} \Delta l + \bar{F}_{AB} + \bar{G}_{AB} - \delta_{AB} m_{PA} / \alpha_{AB} K \right]$$

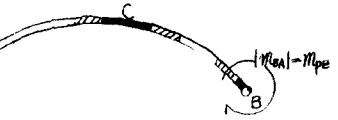
ここに

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{AB} &= \alpha_{AB} - \bar{\beta}_{AB} \beta_{AB}, & \bar{\beta}_{AB} &= \beta_{AB} / \alpha_{AB}, & \bar{\gamma}_{AB} &= \gamma_{AB} - \bar{\beta}_{AB} \gamma_{AB}, & \bar{\delta}_{AB} &= \delta_{AB} + \delta_{AB} \bar{\beta}_{AB}, & \bar{C}_{AB} &= C_{AB} - \bar{\beta}_{AB} C_{AB}, \\ \bar{D}_{AB} &= D_{AB} - \bar{\beta}_{AB} D_{AB}, & \bar{E}_{AB} &= E_{AB} - \bar{\beta}_{AB} E_{AB}, & \bar{N}_{AB} &= N_{AB} - \delta_{AB} C_{AB} / \alpha_{AB} K, & \bar{F}_{AB} &= F_{AB} + \delta_{AB} D_{AB} / \alpha_{AB} K, & \bar{G}_{AB} &= G_{AB} + \delta_{AB} E_{AB} / \alpha_{AB} K \end{aligned}$$

図-2(b)のごとくB端にのみ塑性ヒンジ形成される場合も式(6a)と同様に誘導され次式となる。

$$\begin{aligned} M_{AB} &= R \left(\bar{\alpha}_{AB} \phi_A + \bar{\gamma}_{AB} \psi_{AB} - \bar{\delta}_{AB} \Delta l \right) + \bar{C}_{AB} + \bar{D}_{AB} + \bar{E}_{AB} + \bar{\delta}_{AB} m_{PB} \\ (m_{BA}) &= m_{PB} = 1.5 (1 - n_B^2), & n_B &= N_B / N_y, & m_{PB} &: \text{B端の塑性曲げモーメント} \\ H &= R \left[-\delta_{AB} \left\{ (1 + \bar{\beta}_{AB}) \phi_A + \gamma_{AB} \psi_{AB} / \alpha_{AB} \right\} / K + \bar{N}_{AB} \Delta l + \bar{F}_{AB} + \bar{G}_{AB} + \delta_{AB} m_{PB} / \alpha_{AB} K \right] \end{aligned} \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{AB} &= C_{AB} - \bar{\beta}_{AB} C_{BA}, & \bar{D}_{AB} &= D_{AB} - \bar{\beta}_{AB} D_{BA}, & \bar{E}_{AB} &= E_{AB} - \bar{\beta}_{AB} E_{BA}, \\ \bar{N}_{AB} &= N_{AB} - \delta_{AB} C_{BA} / \alpha_{AB} K, & \bar{F}_{AB} &= F_{AB} - \delta_{AB} D_{BA} / \alpha_{AB} K, \\ \bar{G}_{AB} &= G_{AB} - \delta_{AB} E_{BA} / \alpha_{AB} K \end{aligned}$$



(b) B端塑性ヒンジ



(c) C点塑性ヒンジ

図-2

さらに図-2(c)のごとく部材の途中任意点Cにのみ塑性ヒンジ形成される場合はC点のたわみ角が不連続となるため、部材ABと部材ACと部材CBに分割し、それぞれに式(6b)および式(6a)を適用してこれを解決する手法をとる。

3. 連続円弧アーチの弾塑性解析

連続アーチの弾塑性解析を行なうには、以上導いたたわみ角式を用いて節点の回転角および変位を未知数として節点方程式、切断力の釣合式およびスパン方程式などを用いて解くいわゆる従来の変形法を用うことに帰着する。さらに弾塑性領域を示す θ_j ($j=1, 2, \dots$) などの未知数に対しては弾塑性境界条件式⁽²⁾ 例えは図-1における弾塑性部分の先端A'点、A'点の作用モーメントが部材の初期降伏曲げモーメント $m_{A'}$ および第1弾塑性と第2弾塑性領域との境界を示す臨界曲げモーメント $m_{B'}$ に等しなるべき条件より次式が成立し、結局未知数と同数の条件式をうることになるが、その算法は繰り返し試算となる。

すなわち弾塑性境界条件式は式(3)を併用して次のように表わされる。

$$\begin{aligned} m_{A'} &= 1 - n_{y, \theta_1} = \frac{m_{AB}}{2} \left(1 - \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta} \right) + \frac{m_{BA}}{2} \left(1 + \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta} \right) - H \frac{K}{2 \sin \theta} (\cos \theta_1 - \cos \theta) + m_0(\theta_1) \\ m_{B'} &= 1 + m_{y, \theta_1} - 2 n_{y, \theta_1} = \frac{m_{AB}}{2} \left(1 - \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta} \right) + \frac{m_{BA}}{2} \left(1 + \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta} \right) - H \frac{K}{2 \sin \theta} (\cos \theta_1 - \cos \theta) + m_0(\theta_1) \end{aligned} \quad (7)$$

4. 計算例

図-3に示す2スパン連続アーチ(半開角 $\theta=60^\circ$, 断面高さ-スパン比 $R/l=0.05$) の左スパンABの中央点に単一集中荷重Pが作用し、D点近傍に弾塑性領域が生ずるときの弾塑性たわみ状態を求められ、以下のごとくである。

まず節点モーメントは次のように列記される。

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \beta_{AB} \phi_B + C_{AB} + D_{AB} + E_{AB}, & m_{BC} &= \alpha_{BC} \phi_B \\ m_{BA} &= \alpha_{AB} \phi_B + C_{BA} + D_{BA} + E_{BA}, & m_{CB} &= \beta_{CB} \phi_B \end{aligned} \quad (8)$$

また節Bでの平衡方程式は

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad \dots (9)$$

式(8)の第2, 第3式と式(9)に代入して未知数 ϕ_B について解けば 終局変位をうる。

$$\phi_B = - \frac{C_{BA} + D_{BA} + E_{BA}}{\alpha_{BC} + \alpha_{AB}} \quad \dots (10)$$

よって所要の端モーメント式は式(10)と式(8)のどちらか
の右辺に代入して求められるが、式(10)の演算は D_{BA} ,

E_{BA} にも未知数 ϕ_B を含むので、当初 $D_{BA} = E_{BA} =$

$D_{AB} = E_{AB} = 0$ とする。弾性時の ϕ_B を第0次近似値として用い、これを式(8)つづいて式(7)に代入して弾塑性領域の境界を示す未知数 θ_j ($j=1, 2, \dots$) を求めたうえで D_{BA} , E_{BA} 中の $D_1, \dots, E_3$ (表-1参照) を Simpson 公式による数値積分を用いて試算と算出することとなる。

いま $P=0.15 N_y > P_0$ (初期臨負荷重) が作用する場合と例にとれば、各端モーメント値および θ_j ($j=1, 2, \dots$) 値を表-2のごとく算出され、M-図およびN-図は図-4(a)および(b)のごとくなる。

表 - 2

	$m_a = M_a/M_y$	$m_b = M_b/M_y$	$m_c = M_c/M_y$	$m_d = M_d/M_y$	$m_e = M_e/M_y$	θ_1 度	θ_2 度	θ_3 度	θ_4 度
第0次近似値	0.528	0.324	0.121	1.127	0.056	0.1963	0.0831	0.0944	0.2031
第1次近似値	0.546	0.342	0.128	1.115	0.064	0.1537	0.0542	0.0778	0.1848
第2次近似値	0.539	0.338	0.125	1.118	0.060	0.1647	0.0634	0.0693	0.1955
第3次近似値	0.541	0.339	0.126	1.117	0.061	0.1643	0.0629	0.0687	0.1934

5. 結論

本研究によって連続円弧アーチならびに円弧アーチをもつラーメンの弾塑性挙動が軸力をも考慮して厳密に解明されることになるが、本研究の結果明らかにされたことは、まず式(5)のためみ角式の誘導に際し、弾塑性項の1種である式(4)の $D_1, D_2, \dots, E_3$ をそれぞれ弾性項に比し微小と見做して定数項のごとく取り扱ったゆえ、終局誘導された式(5)の弾塑性項 $D_{AB}, D_{BA}, \dots, G_{AB}$ はそれぞれ弾性時の端モーメントを繰返し試算により補正する操作のみとなった。次に本法と既往の曲げモーメントのみを考慮した弾塑性ためみ角式による解法との比較検討が可能となって軸力の諸力および変形に及ぼす影響が明らかとなり、これについては後日報告する予定である。

本研究は文部省科学研究費の補助を受けた、記して謝意を表する。

参考文献)

- 1) 梅村他：水平力を受けるラーメンの弾塑性(初1)基礎実験，日建築学会論文集，第61号，昭和36年10月
- 2) 坂本・宮村：鋼構造物の弾・塑性域における変形と安定性に関する考察(第1報，第2報，第3報)，日建築学会論文報告集，第110号，第113号，第116号，昭和40年4月，7月，10月
- 3) 山崎・石川：弾塑性解析に用いる変形法の基本式の誘導について，昭和40年度土木学会西部支部研究発表会論文集
- 4) 山崎・石川・黒木：エネルギー法による固定アーチの弾塑性解析，同上
- 5) 山崎・石川：連続アーチの弾塑性解析，第19回年度学術講演会講演概要第1部，昭和39年5月