

カバープレートをもつ変断面ばりの弾塑性解析

九州大学 正員 山崎徳也
 “ 学生員 石川信隆
 “ “ 松澤秀信

1. 緒言

本研究は増部あるいは途中にカバープレートをもつ静定変断面ばりを対象とし、断面が階段状に変化する場合の経済的な断面決定の一指針を与えるべく、従来の塑性設計理論より厳密な弾塑性解析を行なうもので、まず変断面を等断面に置換したうえで置換断面に貯えられる補正エネルギー⁽²⁾を算定し、次いで各種静定変断面ばりの弾塑性たわみをカバープレートの長さおよび厚さをパラメータとして求め、既往の塑性設計理論と比較検討したものである。

2. 変断面ばりに対する補正エネルギー式の誘導

いま図-1のごとき途中に変断面部($I = \alpha I_0, \alpha > 1$)をもち、かつ塑性傾角 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ が生じたはりABを考えると、変断面部における曲げモーメントと曲率との関係は変断面部の断面二次モーメント I を等断面部の I_0 に置換することによって弾性および弾塑性状態においてそれぞれ以下のごとくえられる。すなわち、まず弾性状態の曲率 ϕ は曲げモーメントを M とすれば次式で表わされる。

$$\phi = M/EI = \bar{M}/EI_0 \quad \dots (1)$$

ここに $\bar{M}$ は変断面部を等断面と見做したときの同断面部における曲げモーメントを示し、 $\bar{M} = M/I_0 = M/\alpha$ となる。

次に弾塑性状態における ϕ はいま断面を矩形とすれば同様(文献⁽²⁾)より

$$\phi = M_y / (EI \sqrt{3 - 2M/M_y}) = \bar{M}_y / (EI_0 \sqrt{3 - 2\bar{M}/\bar{M}_y}) \quad \dots (2)$$

ただし $\bar{M}_y = M_y/\beta$, $\beta = (I/I_0)/(S/S_0)$ M_y : 等断面部の降伏曲げモーメント S, S_0 : 変断面部および等断面部の断面係数

さうに図-2のごとき $M-\phi$ 曲線を $M-\phi$ 第1近似直線で置換した場合も同様に M, M_y を $\bar{M}, \bar{M}_y$ に変換すれば次式のごとくえられる。

$$\phi = \kappa(M - M_y)/EI + M_y/EI = \kappa(\bar{M} - \bar{M}_y)/EI_0 + \bar{M}_y/EI_0 \quad \dots (3)$$

ただし κ は $M-\phi$ 第1近似直線の勾配を示す。

なお、式(2)で曲率 ϕ が無限大となるときは完全塑性状態を意味し、式(2)より矩形断面の塑性曲げモーメントは $\bar{M}_p = 1.5 \bar{M}_y$ となり、一般に他形状の断面では次式となる。

$$\bar{M}_p = M_p/\gamma, \quad \gamma = (I/I_0)/(Z/Z_0) \quad \dots (4)$$

ただし M_p : 等断面部の塑性曲げモーメント Z, Z_0 : 変断面部および等断面部の塑性断面係数
 以上導いた曲げモーメント-曲率関係を適用すれば変断面部に対する補正エネルギー $\partial U/\partial S = \int \phi dM$ が容易に誘導可能となり、弾性および弾塑性状態に対してそれぞれ次のごとくえられる。

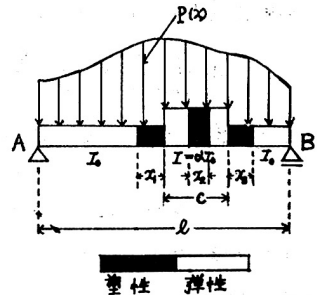


図-1

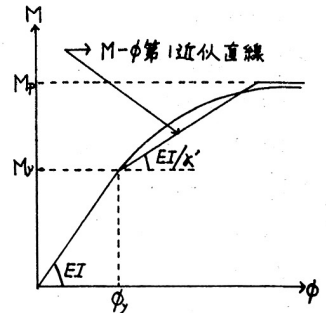


図-2

弾性状態では式(1)より

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial S} = \int_M \phi dM = \frac{\partial \bar{M}^2}{2EI_0} \quad \dots (5)$$

弾塑性状態では式(2)を用いて厳密解

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial S} = \int_{M_y}^{\bar{M}} \phi dM + \int_{\bar{M}}^M \phi dM = \frac{\partial \bar{M}^2}{2EI_0} (3-2\sqrt{3-2\frac{\bar{M}}{M_y}}) \quad \dots (6)$$

また式(3)を用いて近似解

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial S} = \frac{\partial}{2EI_0} [\bar{M}^2 + \kappa (\bar{M} - \bar{M}_y)^2], \quad \kappa = \kappa' - 1 \quad \dots (7)$$

ただし κ はエネルギー等量条件⁽²⁾を用いて定められ、矩形断面では式(6)と式(7)と等量して $\kappa=3$ をうる。

よって変断面部に対する厳密および近似補正エネルギーは式(5), 式(6)および式(7)を長さの方向に積分し等断面部も考慮すれば、結局変断面部⁽¹⁾に対する全補正エネルギーが次式で表わされる。

(i) 厳密補正エネルギー (U_0)

$$U_0 = \int_E \frac{M^2}{2EI_0} ds + \int_F \frac{M_y^2}{2EI_0} (3-2\sqrt{3-2\frac{M}{M_y}}) ds + \int_E \frac{\partial \bar{M}^2}{2EI_0} ds + \int_F \frac{\partial \bar{M}^2}{2EI_0} (3-2\sqrt{3-2\frac{\bar{M}}{M_y}}) ds \quad \dots (8)$$

(ii) $M-\phi$ 第1近似直線に基づく補正エネルギー (U_1)

$$U_1 = \int_{E+F} \frac{M^2}{2EI_0} ds + \kappa \int_F \frac{(M-M_y)^2}{2EI_0} ds + \int_{E+F} \frac{\partial \bar{M}^2}{2EI_0} ds + \kappa \int_F \frac{\partial (\bar{M}-\bar{M}_y)^2}{2EI_0} ds \quad \dots (9)$$

ここに積分記号の添字 E, F は等断面部, $\bar{E}, \bar{F}$ は変断面部における弾性および塑性領域のはり表面での長さをもれを示す。

3. 静定変断面部⁽¹⁾の弾塑性解析

2. で導出した変断面部⁽¹⁾に対する補正エネルギーを用いてカバープレートをもつ単純ばりおよび片持ばりに集中荷重が載荷したときの弾塑性たわみを求める。

(1) 中央集中荷重を受ける変断面単純ばり

図-3のごとく中央にカバープレートをもつ単純ばり AB の中央 C に集中荷重 P が作用して塑性領域が DF, HI, EG だけに生ずるものとすれば、補正エネルギーは式(8)および式(9)より次式のごとくなる。

$$U_0 = 2 \left[\int_0^{x_1} \frac{M^2}{2EI_0} dx + \int_{x_1(x_1+\beta)}^{x_2} \frac{\partial \bar{M}^2}{2EI_0} dx + \int_{x_2}^{x_1(x_1+\beta)} \frac{M_y^2}{2EI_0} (3-2\sqrt{3-2\frac{M}{M_y}}) dx + \int_{x_2}^{\frac{l}{2}} \frac{\partial \bar{M}^2}{2EI_0} (3-2\sqrt{3-2\frac{\bar{M}}{M_y}}) dx \right]$$

$$U_1 = 2 \left[\int_0^{x_1(x_1+\beta)} \frac{M^2}{2EI_0} dx + \int_{x_1(x_1+\beta)}^{\frac{l}{2}} \frac{\partial \bar{M}^2}{2EI_0} dx + \kappa \int_{x_1}^{x_2} \frac{(M-M_y)^2}{2EI_0} dx + \kappa \int_{x_2}^{\frac{l}{2}} \frac{\partial (\bar{M}-\bar{M}_y)^2}{2EI_0} dx \right]$$

ただし $M = Px/2, \bar{M} = Px/2\alpha, \bar{M}_y = M_y/\sqrt{\alpha}, \beta = \sqrt{\alpha}$ (矩形断面)

ここで中央 C 点のたわみを求めるため上式に変分原理を適用すればそれぞれ次式がえされる。

(i) 厳密解によるたわみ (δ)

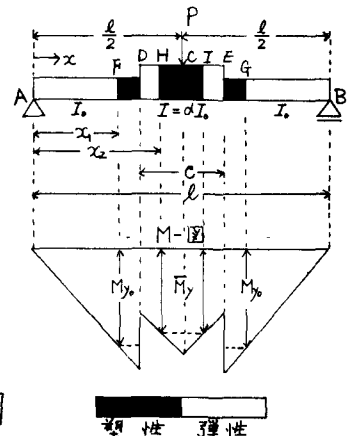


図-3

$$\delta_0 = \frac{24u_0}{\partial P} = \frac{PL^3}{48EI} \left\{ \frac{8X_1^3}{l^3} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{8X_2^3}{l^3} - (1-\frac{C}{l})^3 \right\} - 32 \left(\frac{M_y}{PL} \right)^2 \left\{ (6 + \frac{1}{2}(1-\frac{C}{l}) \frac{PL}{M_y}) \sqrt{3 - \frac{1}{2}(1-\frac{C}{l}) \frac{PL}{M_y}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. - (6 + \frac{X_1 PL}{l M_y}) \sqrt{3 - \frac{X_1 PL}{l M_y}} + \alpha \left\{ (6 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{PL}{M_y}) \sqrt{3 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{PL}{M_y}} - (6 + \frac{X_2 PL}{\sqrt{2} l M_y}) \sqrt{3 - \frac{X_2 PL}{\sqrt{2} l M_y}} \right\} \right\} \right\} \dots (10)$$

(ii) M-φ 第1 近似直線に基づくたわみ(δ₁)

$$\delta_1 = \frac{PL^3}{48EI} \left\{ (1-\frac{C}{l})^3 + \frac{1}{2} \left\{ 1 - (1-\frac{C}{l})^3 \right\} + 3 \left\{ (1-\frac{C}{l})^3 - \frac{8X_1^3}{l^3} + \frac{1}{2} (1-\frac{8X_2^3}{l^3}) \right\} \right. \\ \left. - \frac{PLM_y}{l^2} \left\{ (1-\frac{C}{l})^2 - \frac{8X_1^2}{l^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} (1-\frac{8X_2^2}{l^2}) \right\} \right\} \quad (11)$$

ここに式(10)および式(11)中の X₁, X₂ は弾性・塑性領域との境界を指定し、図-3 の F および H 夾の導出曲げモーメントが M_{y0} および M_{y1} に等しかるべき条件より次式をうる。

$$X_1 = 2M_{y0}/P, \quad X_2 = 2\sqrt{2}M_{y0}/P \quad \text{ただし} \quad 0 \leq X_1 \leq l/2 - C, \quad l/2 - C \leq X_2 \leq l/2 \dots (12)$$

さらに荷重 P は初期降伏荷重 P_y と崩壊荷重 P_u の範囲に規定され P_y, P_u は次式となる。

$$P_y = \min(P_{y1}, P_{y2}), \quad P_u = 1.5P_y \dots (13)$$

ただし P_{y1}, P_{y2} は D 夾および C 夾の初期降伏荷重を示し, P_{y1} = 4M_{y0}/(l-C), P_{y2} = 4√2M_{y0}/l となる。

(c) 集中荷重を受ける変断面片持ばり (図-4 参照)

自由端 A に集中荷重 P を作用する片持ばり AB の A 端におけるたわみおよびたわみ角を求めれば、3.(i) と同様求めるべき次式がえられる。

(i) 厳密解によるたわみ(δ₀) およびたわみ角(θ₀)

$$\delta_0 = \frac{PL^3}{36EI} \left\{ \frac{X_1^3}{l^3} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{X_2^3}{l^3} - (1-\frac{C}{l})^3 \right\} - \left(\frac{M_y}{PL} \right)^2 \left\{ (3 + (1-\frac{C}{l}) \frac{PL}{M_y}) \sqrt{3 - 2(1-\frac{C}{l}) \frac{PL}{M_y}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. - (3 + \frac{X_1 PL}{l M_y}) \sqrt{3 - \frac{2X_1 PL}{l M_y}} + \alpha \left\{ (3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{PL}{M_y}) \sqrt{3 - \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{PL}{M_y}} - (3 + \frac{X_2 PL}{\sqrt{2} l M_y}) \sqrt{3 - \frac{2X_2 PL}{\sqrt{2} l M_y}} \right\} \right\} \right\} \\ \theta_0 = \frac{PL^2}{2EI} \left\{ \frac{X_1^2}{l^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{X_2^2}{l^2} - (1-\frac{C}{l})^2 \right\} - 2 \left(\frac{M_y}{PL} \right)^2 \left\{ \sqrt{3 - 2(1-\frac{C}{l}) \frac{PL}{M_y}} - \sqrt{3 - \frac{2X_1 PL}{l M_y}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2} \left(\sqrt{3 - \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{PL}{M_y}} - \sqrt{3 - \frac{2X_2 PL}{\sqrt{2} l M_y}} \right) \right\} \right\} \quad (14)$$

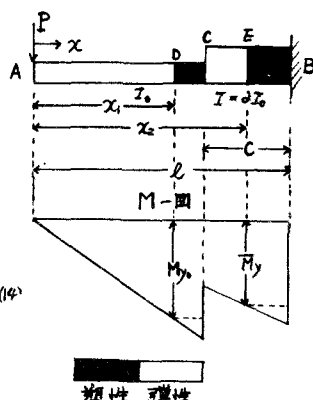


図-4

(ii) M-φ 第1 近似直線に基づくたわみ(δ₁) およびたわみ角(θ₁)

$$\delta_1 = \frac{PL^3}{36EI} \left\{ 2(1-\frac{C}{l})^3 + \frac{2}{2} \left\{ 1 - (1-\frac{C}{l})^3 \right\} + 6 \left\{ (1-\frac{C}{l})^3 - \frac{X_1^3}{l^3} + \frac{1}{2} (1-\frac{X_2^3}{l^3}) - \frac{9M_y}{PL} \left\{ (1-\frac{C}{l})^2 - \frac{X_1^2}{l^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} (1-\frac{X_2^2}{l^2}) \right\} \right\} \right\} \\ \theta_1 = \frac{PL^2}{2EI} \left\{ (1-\frac{C}{l})^2 + \frac{1}{2} \left\{ 1 - (1-\frac{C}{l})^2 \right\} + 3 \left\{ (1-\frac{C}{l})^2 - \frac{X_1^2}{l^2} + \frac{1}{2} (1-\frac{X_2^2}{l^2}) - \frac{6M_y}{PL} \left\{ 1 - \frac{C}{l} - \frac{X_1}{l} + \frac{1}{\sqrt{2}} (1-\frac{X_2}{l}) \right\} \right\} \right\} \quad (15)$$

ただし X₁ = M_{y0}/P, X₂ = √2M_{y0}/P, P_y = min(P_{y1}, P_{y2}), P_u = 1.5P_y, P_{y1} = M_{y0}/(l-C), P_{y2} = √2M_{y0}/l … (16)

4. 数値計算および考察

以上の諸式を用い、変断面の形状比 α = I₂/I₁ および長さ C をパラメータとし、α = 1.25 より 2.00 まで 0.25 刻みで、C = 0.2l より 0.8l まで 0.2l 刻みで数値計算を行った。たか、紙数の都合上、図-6, 7 および表-1 を図示するに止める。

(i) 崩壊過程は α および C の値により次の3つのモデル A, B, C に分類(図-5 参照)されることが分た。

モデル A (図-5(a)) : 荷重史(片持ばりでは固定端)で崩壊する場合で荷重-たわみ曲線が図-6 のようになる場合。

モデルB(図-5(b))断面が階段状に変化する束(以下断面変化束と呼ぶ)で崩壊する場合で荷重のための曲線が図-7のじとくなる場合。

モデルC(図-5(c))荷重束(片持ばり)では固定端と断面変化束とが殆んど同時に崩壊する場合で荷重のための曲線が図-6または図-7のじとくなる場合。

モデルCは荷重束および断面変化束が殆んど同時に降伏する条件すなわち $M_{max}/M_{lim} = M_y/M_p = \beta$ を満足するときのみ起りうるもので、断面を経験的に使用する観点に立てばモデルCの崩壊過程が最も望ましいといえる。

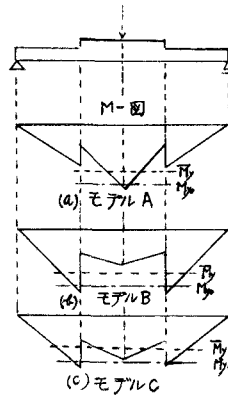


図-5

対 モデル	変断面単純ばり 変断面片持ばり
A	($d=1.25 \sim 1.75, C=0.42$) ($d=1.25 \sim 2.00$, $C=0.6 \sim 0.82$)
B	($d=1.75 \sim 2.00, C=0.22$)
C	($d=1.25 \sim 1.50, C=0.22$) ($d=2.00, C=0.42$)

表-1

以上の結果を総括して表-1に示した。

(2) 図-6, 7に示すじとく荷重(片持)のための曲線は一般に $P=P_y \sim 1.4P_y$ までは直線変化で変形は小さく安全といえるが, $P > 1.4P_y$ を越えると急激な変化を示し, 変形が大きくなる。危険となると認められる。

(3) 図-6, 7を例にとれば厳密解によるたわみ δ_1 とM-φ第1近似直線に基づくたわみ δ_2 との誤差は崩壊時で約3%であるが, 塑性設計によるたわみ δ_1 と δ_2 との誤差は崩壊時で約33%の過小評価していることが分る。これらの傾向は3(2)の方持ばりの算例でもいふ, δ_1 が δ_2 に比べ高精度を有することか立証され, これより等断面ばりと同様変断面ばりにあってもM-φ第1近似直線が十分使用可能なることが了解される。

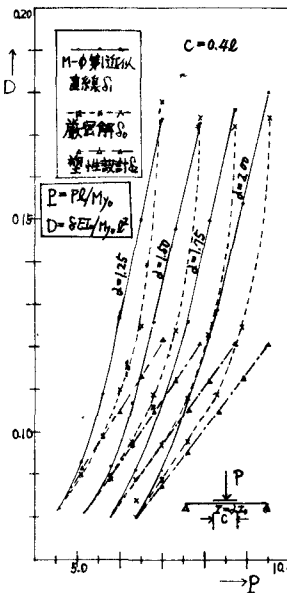


図-6

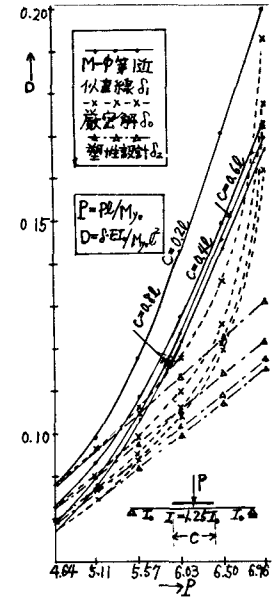


図-7

5. 結び

本法は片持の荷重を受けるカバークラートをもつ静定変断面ばりの弾塑性解析に適用しうるのでさくに不静定変断面構造物に対しては, 等断面の場合と同様に弾塑性変断面たわみ角式を誘導すれば実用弾塑性解析が可能となり, また断面が直線および放物線変化の場合もたまたまの多項式となるのみで本法をとりま適用しうる。本研究には文部省科学研究費の補助を受けた, 記して謝意を表する。

参考文献 1) MIKLÓS HETÉNYI: Deflection of Beams of Varying Cross Section, Journal of Applied Mechanics, vol. 4, 1937. 2) 山崎・大田・石川: 補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析, 土木学会論文集, 第134号, 10, 1966.