長方形孔を有する板が曲げおよび捩りを受けるときの孔縁応力

九州大学　工学部　正員　山崎徳也
〃　〃　学生員　後藤恵之輔
〃　〃　学生員　○岡田実

1. 緒言　孔を有する平面板に面内あるいは面外荷重が作用する場合，孔隅の丸味が孔縁応力におよぼす影響について考察することは興味ある二次元問題であるが，前者の場合については既に多くの研究がなされており，また後者の場合に関する研究としても，Goodier[1]，斉藤[2]その他の人々により主に楕円および正多角形に関しなされており，有孔板の応力については今や研究しつくされた感があるが，本研究で取り上げた長方形孔に関しては，著者らの知る限り僅かにSavin[3]の著書に2，3の計算例があるのみで，これは隅の丸味が考慮されていずに孔の形状による応力の集中具合について論じているにすぎない。そこで著者らは長方形孔を有する無限薄板が孔の遠方においてその一主軸と直交する断面に曲げモーメントあるいは捩りモーメントを受けて彎曲する場合の孔縁応力をSavinとは異なる応力函数を用いて求め，隅の丸味が応力集中におよぼす影響について理論的に解析した。

2. 薄板の断面力の一般式　x, y, z の直角座標を考え，x, y 軸を面内に，z 軸を板面に垂直にとる。板の z 方向の変位を w とすれば w の満たすべき式としては次式のごとくである。

$$D\nabla^4 w = P. \qquad (1)$$

ここに P は板面上に作用する単位面積当りの圧力，D は板の曲げ剛性である。さて孔を有する板が外力を受ける場合，孔の遠方においては孔なき板と同じ状態に
ことは当然であり，それらの点においては次のように考えられる。

(i) 曲げ　x 一定断面に曲げモーメント M_0 を与え，y 軸に平行な母線を有する円柱面に板をるとすれば

$$M_x = M_0, \quad M_y = \sigma M_0, \quad w = -\frac{M_0}{2D}x^2$$

(ii) 捩り　x 一定断面に捩りモーメント H_0 を加えて板を彎曲させる場合は

$$M_{xy} = -M_{yx} = H_0, \quad w = \frac{H_0}{(1-\sigma)D}xy. \qquad \sigma：板のポアッソン比$$

いま，$x + iy = f(\alpha + i\beta)$ の関係がある直交曲線座標を用い，M_α, M_β, $M_{\alpha\beta}$, Q_α, Q_β をそれぞれ α 一定，β 一定の断面に作用する断面力とすれば，α の一定値に対しては次のごとく表わされる。

$$\left.\begin{aligned}
J^4 M_\alpha &= -D\left[J^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right) - \frac{1}{2}(1-\sigma)\frac{\partial J^2}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{2}(1-\sigma)\frac{\partial J^2}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial w}{\partial \beta}\right] \\
J^4 M_{\alpha\beta} &= (1-\sigma)D\left[J^2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\partial \beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial J^2}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial J^2}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right] \\
J^4 Q_\alpha &= -D\left[\left(J^2\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial J^2}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right)\right] \\
\text{ここに}\quad J &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

β の一定値に対しては上式で α と β を取りかえればよい。ただし $M_{\alpha\beta} = -M_{\beta\alpha}$ である。

3. 長方形孔を有する板への適用

図－1のごとく直角座標の原点Oを中心とし二辺がそれぞれ x, y 両軸に直交する近似長方形は次式で表わされる。

$$x = a\{(3e^{\alpha} + 6c^2 f e^{-\alpha})\cos\beta - c^4 e^{-3\alpha}\cos 3\beta\}$$
$$y = a\{(3e^{\alpha} - 6c^2 f e^{-\alpha})\sin\beta + c^4 e^{-3\alpha}\sin 3\beta\} \qquad (3)$$

ただし，c は $0 < c \leqq 1$ なる孔隅の丸味を支配する常数，α は $0 \leqq \alpha \leqq \infty$，$\beta$ は $-\pi \leqq \beta \leqq \pi$，$f$ は孔の両辺の比 b/ℓ と c との函数で次式で与えられるものである。

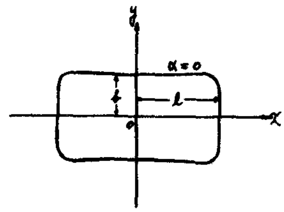

図 - 1

$$f = \frac{1}{2c^2}\left(1 - \frac{c^4}{3}\right)\left(\frac{1 - b/\ell}{1 + b/\ell}\right) \qquad (4)$$

本研究で取扱う隅を丸めた長方形孔には簡単のため，上式において $\alpha = 0$ とおき，また a は長さの単位をもつ任意の正数ゆえ $a = 1$ とおいたものを用いた。ここで例えば $b/\ell = 0.6$ の場合において，c の種々の値に対しその形状を示せば図－2のごとくなる。

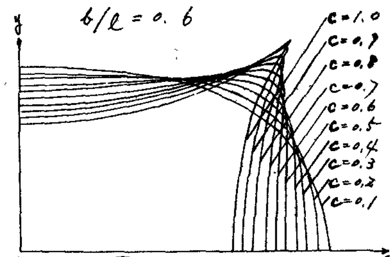

図 - 2

いま，孔縁は自由であるとして次の条件式が成りたつ。すなわち，$\alpha = 0$ において

$$M_{\alpha} = 0, \quad Q_{\alpha} - \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial s} = 0 \qquad (5)$$

ここに s は孔縁の弧長とする。n を孔縁に立てた法線とすれば Q_{α} は次式で表わされる。 $Q_{\alpha} = -D\frac{\partial}{\partial n}\nabla^2 w$

w は $\nabla^4 w = 0$ を満足するから $\nabla^2 w$ は調和函数であって必ず共役な函数を有する。これを Ω とおけば，$\frac{\partial}{\partial n}\nabla^2 w = \frac{\partial \Omega}{\partial s}$ の関係が成りたつから Ω をもって式(5)を書きかえると，$D\frac{\partial \Omega}{\partial s} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial s} = 0$ となるゆえ結局式(5)は次のようになる。

$\alpha = 0$ において $\quad M_{\alpha} = 0, \quad D\Omega + M_{\alpha\beta} = \mathrm{const} \qquad (6)$

ここで本論に適応する $\nabla^4 w = 0$ の一般解を式(3)を用いて求めると次式のごとくなる。

$$\begin{aligned} w = w_0 + w_1 = {} & A_0\alpha + B_0\beta + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{n\alpha} + B_n e^{-n\alpha}) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\} n\beta + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\Big[\frac{3}{2}e^{(n+1)\alpha}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\}(n-1)\beta \\ & + 3c^2 f e^{(n-1)\alpha}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\}(n+1)\beta - \frac{1}{2}c^4 e^{(n-3)\alpha}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\}(n+3)\beta\Big] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n\Big[\frac{3}{2}e^{-(n-1)\alpha}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\}(n+1)\beta \\ & + 3c^2 f e^{-(n+1)\alpha}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\}(n-1)\beta - \frac{1}{2}c^4 e^{-(n+3)\alpha}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\}(n-3)\beta\Big] \\ & + \begin{matrix}E_1\alpha\\ E_2\beta\end{matrix}\Big\}\{3(e^{\alpha} + 2c^2 f e^{-\alpha})\cos\beta - c^4 e^{-3\alpha}\cos 3\beta\} + \begin{matrix}F_1\alpha\\ F_2\beta\end{matrix}\Big\}\{3(e^{\alpha} - 2c^2 f e^{-\alpha})\sin\beta + c^4 e^{-3\alpha}\sin 3\beta\} \end{aligned} \qquad (7)$$

w_0 は孔のない場合のたわみ函数で，w_1 は $w_0 + w_1$ により孔縁における境界条件を満足し，無限の遠方においてはそれ自身によるすべての断面力が消失するような函数である。

4，曲げ問題　2 の(i)を用いる。この場合の w_0 は式(3)により次式のごとく表わされる。

$$\begin{aligned} w_0 &= -\frac{M_0}{2D}x^2 = -\frac{M_0}{2D}\{(3e^{\alpha} + 6c^2 f e^{-\alpha})\cos\beta - c^4 e^{-3\alpha}\cos 3\beta\}^2 \\ &= -\frac{M_0}{2D}\Big\{\Big(\frac{9}{2}e^{2\alpha} + 18c^2 f + 18c^4 f^2 e^{-2\alpha} + \frac{1}{2}c^8 e^{-6\alpha}\Big) + \Big(\frac{9}{2}e^{2\alpha} + 18c^2 f + (18c^4 f^2 - 3c^4)e^{-2\alpha} \\ &\qquad - 6c^6 f e^{-4\alpha}\Big)\cos 2\beta - (3c^4 e^{-2\alpha} + 6c^6 f e^{-4\alpha})\cos 4\beta + \frac{1}{2}c^8 e^{-6\alpha}\cos 6\beta\Big\} \end{aligned} \qquad (8)$$

これに対する w_1 は $\alpha = \infty$ において w_1 のみによる断面力がすべて0となるような項を式(8)の中より選びだせばよい。すなわち

$$\begin{aligned} w_1 = {} & A_0\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n\alpha}\cos n\beta + \sum_{n=1}^{\infty} D_n\Big[\frac{3}{2}e^{-(n-1)\alpha}\cos(n+1)\beta + 3c^2 f e^{-(n+1)\alpha}\cos(n-1)\beta \\ & - \frac{1}{2}c^4 e^{-(n+3)}\cos(n-3)\beta \end{aligned} \qquad (9)$$

ゆえに，式(8)，(9)を加えて，

$$F_0 = \frac{9}{2}e^{2\alpha} + A_0\alpha + 18c^2f + 3c^2f(D_1 + 6c^2f)e^{-2\alpha} + \frac{1}{2}(c^8 - c^4D_3)e^{-6\alpha}$$
$$F_2 = \frac{9}{2}e^{2\alpha} + 18c^2f + \frac{3}{2}D_1 + (B_2 + 18c^4f^2 - 3c^4)e^{-2\alpha} + (3c^2fD_3 - \frac{1}{2}c^4D_1 - 6c^2f)e^{-4\alpha} - \frac{1}{2}c^4D_5e^{-8\alpha}$$
$$F_4 = (\frac{3}{2}D_3 - 3c^4)e^{-2\alpha} + (B_4 - 6c^6f)e^{-4\alpha} + 3c^2fe^{-6\alpha}D_5$$
$$F_6 = (B_6 + \frac{1}{2}c^8)e^{-6\alpha} + \frac{3}{2}e^{-4\alpha}D_5 \qquad (10)$$

とおけば $$W = -\frac{M_0}{2D}[F_0 + F_2\cos 2\beta + F_4\cos 4\beta + F_6\cos 6\beta] \qquad (11)$$

さてここで式(11)を用いて諸量を求める。すなわち

$$J^4M_\alpha = \frac{9M_0}{2}\Big[\big[(1+4c^4f^2+c^8)F_0'' - 2c^2f(1+c^4)(F_2''-4\sigma F_2) + c^4(F_4''-16\sigma F_4) - (1-\sigma)\{(1-4c^4f^2-3c^8)F_0' + 4c^6fF_2' - c^4F_4' + 4c^2f(1+c^4)F_2 - 8c^4F_4\}\big] + \big[-4c^2f(1+c^4)F_0'' + (1+c^4+4c^4f^2+c^8)(F_2''-4\sigma F_2) - 2c^2f(1+c^4)(F_4''-16\sigma F_4) + c^4(F_6''-36\sigma F_6) + (1-\sigma)\{-8c^6fF_0' - (1-c^4-4c^4f^2-3c^8)F_2' - 4c^6fF_4' + c^4F_6' + 4c^4F_2 - 8c^2f(1+c^4)F_4 + 12c^4F_6\}\big]\cos 2\beta + \big[2c^4F_0'' - 2c^2f(1+c^4)(F_2''-4\sigma F_2) + (1+4c^4f^2+c^8)(F_4''-16\sigma F_4) - 2c^2f(1+c^4)(F_6''-36\sigma F_6) + (1-\sigma)\{2c^4F_0' - 4c^6fF_2' - (1-4c^4f^2-3c^8)F_4' - 4c^6fF_6' + 4c^2f(1+c^4)F_2 - 12c^2f(1+c^4)F_6\}\big]\cos 4\beta + \big[c^4(F_2''-4\sigma F_2) - 2c^2f(1+c^4)(F_4''-16\sigma F_4) + (1+4c^4f^2+c^8)(F_6''-36\sigma F_6) + (1-\sigma)\{c^4F_2' - 4c^6fF_4' - (1-4c^4f^2-3c^8)F_6' - 4c^4F_2 + 8c^2f(1+c^4)F_4\}\big]\cos 6\beta + \big[c^4(F_4''-16\sigma F_4) - 2c^2f(1+c^4)(F_6''-36\sigma F_6) + (1-\sigma)\{c^4F_4' - 4c^6fF_6' - 8c^4F_4 + 12c^2f(1+c^4)F_6\}\big]\cos 8\beta + \big[c^4(F_6''-36\sigma F_6) + (1-\sigma)\{c^4F_6' - 12c^4F_6\}\big]\cos 10\beta\Big] \qquad (12)$$

$$J^4M_\beta = \frac{9M_0}{2}\Big[\big[(1+4c^4f^2+c^8)\sigma F_0'' - 2c^2f(1+c^4)(\sigma F_2''-4F_2) + c^4(\sigma F_4''-16F_4) + (1-\sigma)\{4c^2f(1+c^4)F_2 - 8c^4F_4 + (1-4c^4f^2-3c^8)F_0' - 4c^6fF_2' - c^4F_4'\}\big] + \big[-4c^2f(1+c^4)\sigma F_0'' + (1+c^4+4c^4f^2+c^8)(\sigma F_2''-4F_2) - 2c^2f(1+c^4)(\sigma F_4''-16F_4) + c^4(\sigma F_6''-36F_6) + (1-\sigma)\{-4c^4F_2 + 8c^2f(1+c^4)F_4 - 12c^4F_6 + 8c^6fF_0' + (1-4c^4f^2-3c^8)F_2' - c^4F_2' + 4c^6fF_4' - c^4F_6'\}\big]\cos 2\beta + \big[2c^4\sigma F_0'' - 2c^2f(1+c^4)(\sigma F_2''-4F_2) + (1+4c^4f^2+c^8)(\sigma F_4''-16F_4) - 2c^2f(1+c^4)(\sigma F_6''-36F_6) + (1-\sigma)\{-4c^2f(1+c^4)F_2 + 12c^2f(1+c^4)F_6 - 2c^4F_0' + 4c^6fF_2' + (1-4c^4f^2-3c^8)F_4' + 4c^6fF_6'\}\big]\cos 4\beta + \big[c^4(\sigma F_2''-4F_2) - 2c^2f(1+c^4)(\sigma F_4''-16F_4) + (1+4c^4f^2+c^8)(\sigma F_6''-36F_6) + (1-\sigma)\{4c^4F_2 - 8c^2f(1+c^4)F_4 - c^4F_2' + 4c^6fF_4' + (1-4c^4f^2-3c^8)F_6'\}\big]\cos 6\beta + \big[c^4(\sigma F_4''-16F_4) - 2c^2f(1+c^4)(\sigma F_6''-36F_6) + (1-\sigma)\{8c^4F_4 - 12c^2f(1+c^4)F_6 - c^4F_4' + 4c^6fF_6'\}\big]\cos 8\beta + \big[c^4(\sigma F_6''-36F_6) + (1-\sigma)(12c^4F_6 - c^4F_6')\big]\cos 10\beta\Big] \qquad (13)$$

$$J^4M_{\alpha\beta} = -J^4M_{\beta\alpha} = 9(1-\sigma)M_0\Big[\{-(1+c^4-4c^4f^2-3c^8)F_2 + (1-2c^4+4c^4f^2+c^8)F_2' + 2c^2f(1+c^4)F_0' - 8c^6fF_4 - 5c^2f(1+c^4)F_4' + 3c^4F_6 + 4c^4F_6'\}\sin 2\beta + \{-2c^4F_0' - 4c^6fF_2 - c^2f(1+c^4)F_2' - 2(1-4c^4f^2-3c^8)F_4 + 2(1+4c^4f^2+c^8)F_4' - 12c^6fF_6 - 7c^2f(1+c^4)F_6'\}\sin 4\beta + \{c^4F_2 - 8c^6fF_4 - 3c^2f(1+c^4)F_4' - 3(1-4c^4f^2-3c^8)F_6 + 3(1+4c^4f^2+c^8)F_6'\}\sin 6\beta + \{2c^4F_4 + c^4F_4' - 12c^6fF_6 - 5c^2f(1+c^4)F_6'\}\sin 8\beta + \{3c^4F_6 + 2c^4F_6'\}\sin 10\beta\Big] \qquad (14)$$

孔縁$\alpha=0$においては前記の条件式(6)を満足する必要がある。この条件式より積分常数A_0, B_2, B_4, B_6, D_1, D_3, D_5を求める式を作れば次式のごとくなる。

$$9(1+\sigma)-54(1-\sigma)c^2f+144(1+\sigma)c^4f^2-54(1-\sigma)c^6f-216(1-\sigma)c^6f^3+36(1+\sigma)c^8$$
$$+144(1+\sigma)c^8f^2+144(1+\sigma)c^8f^4-108(1-\sigma)c^{10}f-72(1-\sigma)c^{10}f^3+144(1+\sigma)c^{12}f^2$$
$$+9(1+\sigma)c^{16}-(1-\sigma)(1-4c^4f^2-3c^8)A_0-4(1-\sigma)(3c^2f+c^6f)B_2+20(1-\sigma)c^4B_4$$
$$+\{12(1+\sigma)c^2f+12(1+\sigma)c^6f+48c^6f^3+4(1+5\sigma)c^{10}f\}D_1-\{6(1+5\sigma)c^4+36(3-\sigma)c^4f^2$$
$$+24(5+\sigma)c^8f^2+9(1+\sigma)c^{12}\}D_3+\{60(3-\sigma)c^6f+10(5+\sigma)c^{10}f\}D_5=0 \quad \cdots\cdots(i)$$
$$\{-18(1-\sigma)c^2f+36(1+\sigma)c^4+72(1+\sigma)c^4f^2-162(1-\sigma)c^6f-72(1-\sigma)c^6f^3+288(1+\sigma)c^8f^2$$
$$-54(1-\sigma)c^{10}f-216(1-\sigma)c^{10}f^3-12(1+3\sigma)c^{12}+72(1+\sigma)c^{12}f^2-54(1-\sigma)c^{14}f\}$$
$$+2c^4(1-\sigma)A_0-4c^2f(1-\sigma)(1-c^4)B_2+(20+48c^4f^2+4c^8)(1-\sigma)B_4-c^2f(1-\sigma)(84+60c^4)B_6$$
$$+\{6(1+\sigma)c^2f+16(2+\sigma)c^6f+6(1+\sigma)c^{10}f\}D_1+\{9(1-3\sigma)-72(1+\sigma)c^4f^2-3(11+7\sigma)c^8$$
$$-36(1+\sigma)c^8f^2\}D_3+\{60(1+\sigma)c^2f+20(1+5\sigma)c^6f+120(3-\sigma)c^6f^3+20(5+\sigma)c^{10}f\}D_5=0$$
$$\cdots\cdots(ii)$$

$$9(1-\sigma)c^4-72(1+\sigma)c^6f+27(1-\sigma)c^8+108(1-\sigma)c^8f^2-72(1+\sigma)c^{10}f-36(1-\sigma)c^{12}f^2$$
$$+9(1-\sigma)c^{16}-2(1-\sigma)c^4B_2-8(1-\sigma)(3c^2f+c^6f)B_4+6(1-\sigma)(7+20c^4f^2+3c^8)B_6-2\{3c^4$$
$$+(2+\sigma)c^8\}D_1+36\{\sigma c^2f+(1+\sigma)c^6f\}D_3+10\{3(1-2\sigma)+12(1+\sigma)c^4f^2-2(1+2\sigma)c^8$$
$$-12c^8f^2\}D_5=0 \quad \cdots\cdots(xiii)$$
$$\{18(1+\sigma)c^8-54(1-\sigma)c^{10}f-18(1-\sigma)c^{14}f\}+\{4(1-\sigma)c^4B_4\}-\{60(1-\sigma)+36(1-\sigma)c^6f\}B_6$$
$$+\{9(1+\sigma)c^4\}D_3-\{30(1-3\sigma)c^2f-60(1+\sigma)c^6f\}D_5=0 \quad \cdots\cdots(xiv) \quad (15)$$

式(15)より各積分常数を求め，これらを(12)，(13)，(14)の各式に代入すれば所要の孔縁における断面力 $M_\beta(\alpha=0)$ および $M_{\beta\alpha}(\alpha=0)$ が求まる。

5 捩り問題 2,の(ii)を用いる。捩りモーメント H_0 を作用させる場合 w は次式のごとくなる。

$$W=\frac{H_0}{D(1-\sigma)}\Big[\frac{1}{2}\{(9e^{2\alpha}+(6c^4-36c^4f^2)e^{-2\alpha})\sin 2\beta+12c^6f e^{-4\alpha}\sin 4\beta-c^8e^{-6\alpha}\sin 6\beta\}$$
$$+B_2e^{-2\alpha}\sin 2\beta+B_4e^{-4\alpha}\sin 4\beta+B_6e^{-6\alpha}\sin 6\beta+D_1\{\frac{1}{2}(3+c^4e^{-4\alpha})\sin 2\beta\}$$
$$+D_3\{\frac{3}{2}e^{-2\alpha}\sin 4\beta+3c^2fe^{-4\alpha}\sin 2\beta\}+D_5\{\frac{3}{2}e^{-4\alpha}\sin 6\beta+3c^2fe^{-6\alpha}\sin 4\beta-\frac{1}{2}c^4e^{-8\alpha}\sin 2\beta\}\Big]$$

ここで
$$F_2=\frac{9}{2}e^{2\alpha}+(3c^4-18c^4f^2+B_2)e^{-2\alpha}+\frac{3}{2}D_1+(\frac{c^4}{2}D_1+3c^2fD_3)e^{-4\alpha}-\frac{1}{2}c^4D_5e^{-8\alpha}$$
$$F_4=\frac{3}{2}e^{-2\alpha}D_3+(6c^6f+B_4)e^{-4\alpha}+3c^2fe^{-6\alpha}D_5$$
$$F_6=(-\frac{1}{2}c^8+B_6)e^{-6\alpha}+\frac{3}{2}e^{-4\alpha}D_5 \qquad (16)$$
と置けば w は次式のごとくなる。
$$W=\frac{H_0}{D(1-\sigma)}(F_2\sin 2\beta+F_4\sin 4\beta+F_6\sin 6\beta) \qquad (17)$$

式(17)により曲げの場合と同様に，M_α, M_β, $M_{\alpha\beta}$ を求め，孔縁における条件式(6)により積分常数 B_2, B_4, B_6, D_1, D_3, D_5 を決定し，M_α M_β, $M_{\alpha\beta}$ の計算式に代入すれば所要の孔縁における断面力 $M_\beta(\alpha=0)$ および $M_{\beta\alpha}(\alpha=0)$ が求まる。

参考文献 (1) J. N. Goodier, Phil. Mag., Vol. 22 (1936)
(2) 斉藤秀雄，日本機械学会論文集，第17巻，第61号，(昭和26年)
(3) G. N. Savin, Stress Concentration Around Holes, Pergamon Press,
(4) S. Timoshenko, Theory of Plates and Shells, (1944), P94.