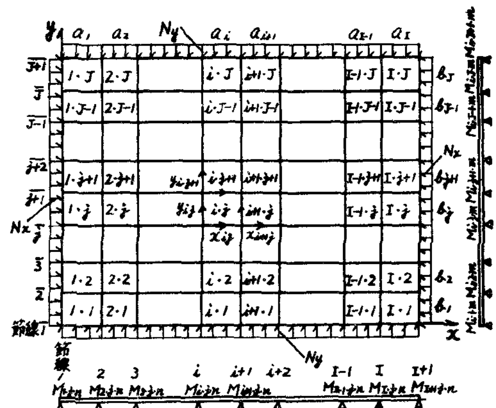
二方向連続等方性矩形板の安定

九州大学　正 員　山崎 徳也
〃　　正 員　彦坂 煕
〃　　学生員○葛城幸一郎

緒言　連続矩形平板の安定に関する既往の研究として一方向連続板に関しては、それぞれ一対辺単純支持および一対辺自由の場合を取り扱った倉田氏[1]および著者[2]らのものがあるが、二方向連続矩形板の安定問題を扱った論文は未だ見あたらない。本文は前記著者らの研究を、任意境界条件をもつ二方向連続矩形板に拡張し、かかる板が図−1のごとく互いに垂直な二方向からの周辺直圧力を受ける場合の安定問題の厳密解法を提示するものである。



図−1

1．たわみ角−端モーメント関係式の誘導

図−2のごとく二辺の長さがa，bなる等方性等断面矩形板が単位巾あたりN_x，N_yなる中立面内の等分布圧縮力を受ける場合の微分方程式は次式で表わされる。

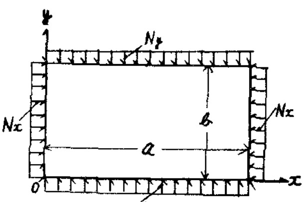
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{1}{D}\left(N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0 \qquad (1)$$

ここにDは板剛度で板厚をh，材料のヤング率およびポアソン比をそれぞれE，νとすれば

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{である。}$$

いま式(1)を満足するたわみwの一般解が次式で表わされるものとする。

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}X\sin\frac{n\pi y}{b}+\sum_{m=1}^{\infty}Y\sin\frac{m\pi x}{a} \qquad (2)$$



図−2

ここにX，Yはそれぞれx，yのみの函数であり式(2)を式(1)に代入して解けばX，Yがそれぞれ次式のごとく求められる。

$$\left.\begin{aligned}X&=C_{n1}\cosh\pi\lambda_1\xi+C_{n2}\sinh\pi\lambda_1\xi+C_{n3}\cosh\pi\lambda_2\xi+C_{n4}\sinh\pi\lambda_2\xi\\Y&=D_{m1}\cosh\pi\mu_1\eta+D_{m2}\sinh\pi\mu_1\eta+D_{m3}\cosh\pi\mu_2\eta+D_{m4}\sinh\pi\mu_2\eta\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ただし$C_{n1}\sim C_{n4}$，$D_{m1}\sim D_{m4}$は積分定数。

$$\lambda_1=\frac{a}{b}\sqrt{\left\{n^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{R}{2}\right\}+\sqrt{\left\{n^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{R}{2}\right\}^2-n^2\{n^2-Q\}}} \qquad \mu_1=\frac{b}{a}\sqrt{\left\{m^2-\left(\frac{a}{b}\right)^2\frac{Q}{2}\right\}+\sqrt{\left\{m^2-\left(\frac{a}{b}\right)^2\frac{Q}{2}\right\}^2-m^2\{m^2-Q\}}}$$

$$\lambda_2=\frac{a}{b}\sqrt{\left\{n^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{R}{2}\right\}-\sqrt{\left\{n^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{R}{2}\right\}^2-n^2\{n^2-Q\}}} \qquad \mu_2=\frac{b}{a}\sqrt{\left\{m^2-\left(\frac{a}{b}\right)^2\frac{Q}{2}\right\}-\sqrt{\left\{m^2-\left(\frac{a}{b}\right)^2\frac{Q}{2}\right\}^2-m^2\{m^2-Q\}}}$$

$$\xi=\frac{x}{a},\quad \eta=\frac{y}{b},\quad R=\frac{N_x a^2}{D\pi^2},\quad Q=\frac{N_y b^2}{D\pi^2}$$

以上の式(2)，(3)より結局式(1)の一般解は次式で表わされることになる。

$$\begin{aligned}w=&\sum_{n=1}^{\infty}(C_{n1}\cosh\pi\lambda_1\xi+C_{n2}\sinh\pi\lambda_1\xi+C_{n3}\cosh\pi\lambda_2\xi+C_{n4}\sinh\pi\lambda_2\xi)\sin n\pi\eta\\&+\sum_{m=1}^{\infty}(D_{m1}\cosh\pi\mu_1\eta+D_{m2}\sinh\pi\mu_1\eta+D_{m3}\cosh\pi\mu_2\eta+D_{m4}\sinh\pi\mu_2\eta)\sin m\pi\xi \qquad (4)\end{aligned}$$

いま$x=0$，aおよび$y=0$，bにおける境界条件を正弦フーリエ級数を用いて次式にて一般表示するものとする。

$$\left.\begin{aligned}&(w)_{x=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{An}\sin n\pi\eta,\quad -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0}=\sum_{n=1}^{\infty}M_{An}\sin n\pi\eta,\quad (w)_{y=0}=\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{Cm}\sin m\pi\xi\quad -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=0}=\sum_{m=1}^{\infty}M_{Cm}\sin m\pi\xi\\&(w)_{x=a}=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{Bn}\sin n\pi\eta,\quad -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a}=\sum_{n=1}^{\infty}M_{Bn}\sin n\pi\eta,\quad (w)_{y=b}=\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{Dm}\sin m\pi\xi,\quad -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b}=\sum_{m=1}^{\infty}M_{Dm}\sin m\pi\xi\end{aligned}\right\}$$

式(4)を式(5)に代入すれば積分定数$C_{n1}\sim C_{n4}$および$D_{m1}\sim D_{m4}$が次のごとく決定される。

$$\left.\begin{aligned}
C_{n1} &= -\frac{1}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\frac{M_{An}}{D} - \frac{\lambda_2^2-\nu\left(\frac{na}{b}\right)^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\delta_{An} \\
C_{n2} &= \frac{1}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\sinh\pi\lambda_1}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\left(\frac{M_{An}}{D}\cosh\pi\lambda_1-\frac{M_{Bn}}{D}\right) + \frac{\lambda_2^2-\nu\left(\frac{na}{b}\right)^2}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\sinh\pi\lambda_1}(\delta_{An}\cosh\pi\lambda_1-\delta_{Bn}) \\
C_{n3} &= \frac{1}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\frac{M_{An}}{D} + \frac{\lambda_1^2-\nu\left(\frac{na}{b}\right)^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\delta_{An} \\
C_{n4} &= -\frac{1}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\sinh\pi\lambda_2}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\left(\frac{M_{An}}{D}\cosh\pi\lambda_2-\frac{M_{Bn}}{D}\right) - \frac{\lambda_1^2-\nu\left(\frac{na}{b}\right)^2}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\sinh\pi\lambda_2}(\delta_{An}\cosh\pi\lambda_2-\delta_{Bn}) \\
D_{m1} &= -\frac{1}{(\mu_1^2-\mu_2^2)}\left(\frac{b}{\pi}\right)^2\frac{M_{Cm}}{D} - \frac{\mu_2^2-\nu\left(\frac{mb}{a}\right)^2}{\mu_1^2-\mu_2^2}\delta_{Cm} \\
D_{m2} &= \frac{1}{(\mu_1^2-\mu_2^2)\sinh\pi\mu_1}\left(\frac{b}{\pi}\right)^2\left(\frac{M_{Cm}}{D}\cosh\pi\mu_1-\frac{M_{Dm}}{D}\right) + \frac{\mu_2^2-\nu\left(\frac{mb}{a}\right)^2}{(\mu_1^2-\mu_2^2)\sinh\pi\mu_1}(\delta_{Cm}\cosh\pi\lambda_1-\delta_{Dm}) \\
D_{m3} &= \frac{1}{(\mu_1^2-\mu_2^2)}\left(\frac{b}{\pi}\right)^2\frac{M_{Cm}}{D} + \frac{\mu_1^2-\nu\left(\frac{mb}{a}\right)^2}{\mu_1^2-\mu_2^2}\delta_{Cm} \\
D_{m4} &= -\frac{1}{(\mu_1^2-\mu_2^2)\sinh\pi\mu_2}\left(\frac{b}{\pi}\right)^2\left(\frac{M_{Cm}}{D}\cosh\pi\mu_2-\frac{M_{Dm}}{D}\right) - \frac{\mu_1^2-\nu\left(\frac{mb}{a}\right)^2}{(\mu_1^2-\mu_2^2)\sinh\pi\mu_2}(\delta_{Cm}\cosh\pi\mu_2-\delta_{Dm})
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

次いで辺$x=0, a$および$y=0, b$におけるたわみ角および反力も正弦フーリエ級数を用いて次式のごとく表わされるものとする。

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_{An}\sin n\pi\eta && \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=\sum_{m=1}^{\infty}\theta_{Cm}\sin m\pi\xi \\
&\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a}=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_{Bn}\sin n\pi\eta && \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b}=\sum_{m=1}^{\infty}\theta_{Dm}\sin m\pi\xi \\
&-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]_{x=0}=\sum_{n=1}^{\infty}V_{An}\sin n\pi\eta && -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right]_{y=0}=\sum_{m=1}^{\infty}V_{Cm}\sin m\pi\xi \\
&-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]_{x=a}=\sum_{n=1}^{\infty}V_{Bn}\sin n\pi\eta && -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right]_{y=b}=\sum_{m=1}^{\infty}V_{Dm}\sin m\pi\xi
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

式(4)を式(7)に代入して解けば材端における，たわみ角係数$\theta_{An}, \theta_{Bn}, \theta_{Cm}, \theta_{Dm}$および反力係数$V_{An}, V_{Bn}$ V_{Cm}, V_{Dm}と曲げモーメント係数$M_{An}, M_{Bn}, M_{Cm}, M_{Dm}$およびたわみ係数$\delta_{An}, \delta_{Bn}, \delta_{Cm}, \delta_{Dm}$との関係式が次のごとく導かれる。

たわみ角ー端モーメント関係式

$$\left.\begin{aligned}
\theta_{An} &= \mathbb{A}_n\frac{M_{An}}{D\pi}a+\mathbb{B}_n\frac{M_{Bn}}{D\pi}a+\mathbb{C}_n\frac{\delta_{An}}{a}+\mathbb{D}_n\frac{\delta_{Bn}}{a}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathbb{E}_{mn'}\frac{b}{D\pi}(M_{Cm}-(-1)^{n'}M_{Dm})+\mathbb{F}_{mn'}\left(\frac{\delta_{Cm}}{b}-(-1)^{n'}\frac{\delta_{Dm}}{b}\right)\right] \\
\theta_{Bn} &= -\mathbb{B}_n\frac{M_{An}}{D\pi}a-\mathbb{A}_n\frac{M_{Bn}}{D\pi}a-\mathbb{D}_n\frac{\delta_{An}}{a}-\mathbb{C}_n\frac{\delta_{Bn}}{a}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left[\mathbb{E}_{mn'}\frac{b}{D\pi}(M_{Cm}-(-1)^{n'}M_{Dm})+\mathbb{F}_{mn'}\left(\frac{\delta_{Cm}}{b}-(-1)^{n'}\frac{\delta_{Dm}}{b}\right)\right] \\
\theta_{Cm} &= \mathbb{G}_m\frac{M_{Cm}}{D\pi}b+\mathbb{H}_m\frac{M_{Dm}}{D\pi}b+\mathbb{I}_m\frac{\delta_{Cm}}{b}+\mathbb{J}_m\frac{\delta_{Dm}}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathbb{K}_{m'n}\frac{a}{D\pi}(M_{An}-(-1)^{m'}M_{Bn})+\mathbb{L}_{m'n}\left(\frac{\delta_{An}}{a}-(-1)^{m'}\frac{\delta_{Bn}}{a}\right)\right] \\
\theta_{Dm} &= -\mathbb{H}_m\frac{M_{Cm}}{D\pi}b-\mathbb{G}_m\frac{M_{Dm}}{D\pi}b-\mathbb{J}_m\frac{\delta_{Cm}}{b}-\mathbb{I}_m\frac{\delta_{Dm}}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\mathbb{K}_{m'n}\frac{a}{D\pi}(M_{An}-(-1)^{m'}M_{Bn})+\mathbb{L}_{m'n}\left(\frac{\delta_{An}}{a}-(-1)^{m'}\frac{\delta_{Bn}}{a}\right)\right]
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

反力ー端モーメント関係式

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{a^2}{D\pi^2}V_{An} &= \mathbb{R}_n\frac{M_{An}}{D\pi}a+\mathbb{S}_n\frac{M_{Bn}}{D\pi}a+\mathbb{T}_n\frac{\delta_{An}}{a}+\mathbb{U}_n\frac{\delta_{Bn}}{a}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathbb{V}_{mn'}\frac{b}{D\pi}(M_{Cm}-(-1)^{n'}M_{Dm})+\mathbb{W}_{mn'}\left(\frac{\delta_{Cm}}{b}-(-1)^{n'}\frac{\delta_{Dm}}{b}\right)\right] \\
-\frac{a^2}{D\pi^2}V_{Bn} &= -\mathbb{S}_n\frac{M_{An}}{D\pi}a-\mathbb{R}_n\frac{M_{Bn}}{D\pi}a-\mathbb{U}_n\frac{\delta_{An}}{a}-\mathbb{T}_n\frac{\delta_{Bn}}{a}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left[\mathbb{V}_{mn'}\frac{b}{D\pi}(M_{Cm}-(-1)^{n'}M_{Dm})+\mathbb{W}_{mn'}\left(\frac{\delta_{Cm}}{b}-(-1)^{n'}\frac{\delta_{Dm}}{b}\right)\right] \\
-\frac{b^2}{D\pi^2}V_{Cm} &= \mathbb{M}_m\frac{M_{Cm}}{D\pi}b+\mathbb{N}_m\frac{M_{Dm}}{D\pi}b+\mathbb{P}_m\frac{\delta_{Cm}}{b}+\mathbb{Q}_m\frac{\delta_{Dm}}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathbb{X}_{m'n}\frac{a}{D\pi}(M_{An}-(-1)^{m'}M_{Bn})+\mathbb{Y}_{m'n}\left(\frac{\delta_{An}}{a}-(-1)^{m'}\frac{\delta_{Bn}}{a}\right)\right] \\
-\frac{b^2}{D\pi^2}V_{Dm} &= -\mathbb{N}_m\frac{M_{Cm}}{D\pi}b-\mathbb{M}_m\frac{M_{Dm}}{D\pi}b-\mathbb{Q}_m\frac{\delta_{Cm}}{b}-\mathbb{P}_m\frac{\delta_{Dm}}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\mathbb{X}_{m'n}\frac{a}{D\pi}(M_{An}-(-1)^{m'}M_{Bn})+\mathbb{Y}_{m'n}\left(\frac{\delta_{An}}{a}-(-1)^{m'}\frac{\delta_{Bn}}{a}\right)\right]
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

ここに

$$\mathbb{A}_n=\frac{1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}(\lambda_1\coth\pi\lambda_1-\lambda_2\coth\pi\lambda_2) \qquad \mathbb{B}_n=\frac{-1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}(\lambda_1\operatorname{cosech}\pi\lambda_1-\lambda_2\operatorname{cosech}\pi\lambda_2)$$

$$\mathbb{C}_n=\frac{\pi}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\left\{\lambda_1\left(\lambda_2^2-\nu\left(\frac{na}{b}\right)^2\right)\coth\pi\lambda_1-\lambda_2\left(\lambda_1^2-\nu\left(\frac{na}{b}\right)^2\right)\coth\pi\lambda_2\right\} \qquad \mathbb{D}_n=\frac{-\pi}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\left\{\lambda_1\left(\lambda_2^2-\nu\left(\frac{na}{b}\right)^2\right)\operatorname{cosech}\pi\lambda_1-\lambda_2\left(\lambda_1^2-\nu\left(\frac{na}{b}\right)^2\right)\operatorname{cosech}\pi\lambda_2\right\}$$

$$\mathbb{E}_{mn'}=\frac{2}{\pi}\frac{b}{a}\frac{mn'}{(\mu_1^2+n'^2)(\mu_2^2+n'^2)} \qquad \mathbb{F}_{mn'}=\frac{2b}{a}\frac{mn'}{(\mu_1^2+n'^2)(\mu_2^2+n'^2)}\left\{\mu_1^2+\mu_2^2+n'^2-\nu\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right\}$$

$$\mathbb{G}_m=\frac{1}{\mu_1^2-\mu_2^2}(\mu_1\coth\pi\mu_1-\mu_2\coth\pi\mu_2) \qquad \mathbb{H}_m=\frac{-1}{\mu_1^2-\mu_2^2}(\mu_1\operatorname{cosech}\pi\mu_1-\mu_2\operatorname{cosech}\pi\mu_2)$$

$$\mathbb{I}_m=\frac{\pi}{\mu_1^2-\mu_2^2}\left\{\mu_1\left(\mu_2^2-\nu\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right)\coth\pi\mu_1-\mu_2\left(\mu_1^2-\nu\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right)\coth\pi\mu_2\right\} \qquad \mathbb{J}_m=\frac{-\pi}{\mu_1^2-\mu_2^2}\left\{\mu_1\left(\mu_2^2-\nu\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right)\operatorname{cosech}\pi\mu_1-\mu_2\left(\mu_1^2-\nu\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right)\operatorname{cosech}\pi\mu_2\right\}$$

$$\mathbb{K}_{m'n}=\frac{2}{\pi}\frac{a}{b}\frac{m'n}{(\lambda_1^2+m'^2)(\lambda_2^2+m'^2)} \qquad \mathbb{L}_{m'n}=\frac{2a}{b}\frac{m'n}{(\lambda_1^2+m'^2)(\lambda_2^2+m'^2)}\left\{\lambda_1^2+\lambda_2^2+m'^2-\nu\left(\frac{na}{b}\right)^2\right\}$$

$$\mathbb{R}_n=\frac{1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\left[\lambda_1\left\{\lambda_1^2-(2-\nu)\left(\frac{na}{b}\right)^2\right\}\coth\pi\lambda_1-\lambda_2\left(\lambda_2^2-(2-\nu)\left(\frac{na}{b}\right)^2\right)\coth\pi\lambda_2\right] \qquad \mathbb{S}_n=\frac{-\pi}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\left\{\lambda_1\left(\lambda_1^2-(2-\nu)\left(\frac{na}{b}\right)^2\right)\operatorname{cosech}\pi\lambda_1-\lambda_2\left\{\lambda_2^2-(2-\nu)\left(\frac{na}{b}\right)^2\right\}\operatorname{cosech}\pi\lambda_2\right\}$$

$$\mathbb{P}_m=\frac{\pi}{\mu_1^2-\mu_2^2}\left[\mu_1\left\{\mu_1^2-(2-\nu)\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right\}\left\{\mu_2^2-\nu\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right\}\coth\pi\mu_1-\mu_2\left\{\mu_2^2-(2-\nu)\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right\}\left\{\mu_1^2-\nu\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right\}\coth\pi\mu_2\right]$$

$$\mathbb{T}_n=\frac{\pi}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\left[\lambda_1\left\{\lambda_1^2-(2-\nu)\left(\frac{na}{b}\right)^2\right\}\left\{\lambda_2^2-\nu\left(\frac{na}{b}\right)^2\right\}\coth\pi\lambda_1-\lambda_2\left\{\lambda_2^2-(2-\nu)\left(\frac{na}{b}\right)^2\right\}\left\{\lambda_1^2-\nu\left(\frac{na}{b}\right)^2\right\}\coth\pi\lambda_2\right]$$

$$\mathbb{U}_n=\frac{-\pi}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\left[\lambda_1\left\{\lambda_1^2-(2-\nu)\left(\frac{na}{b}\right)^2\right\}\left\{\lambda_2^2-\nu\left(\frac{na}{b}\right)^2\right\}\operatorname{cosech}\pi\lambda_1-\lambda_2\left\{\lambda_2^2-(2-\nu)\left(\frac{na}{b}\right)^2\right\}\left\{\lambda_1^2-(2-\nu)\left(\frac{na}{b}\right)^2\right\}\operatorname{cosech}\pi\lambda_2\right]$$

$$\mathbb{V}_{mn'}=-\frac{2}{\pi}\frac{b}{a}\frac{mn'}{(\mu_1^2+n'^2)(\mu_2^2+n'^2)}\left\{m^2+(2-\nu)\left(\frac{n'a}{b}\right)^2\right\},\qquad \mathbb{X}_{m'n}=-\frac{2}{\pi}\frac{a}{b}\frac{m'n}{(\lambda_1^2+m'^2)(\lambda_2^2+m'^2)}\left\{n^2+(2-\nu)\left(\frac{m'b}{a}\right)^2\right\}$$

$$\mathbb{W}_{mn'}=\frac{-2b}{a}\frac{mn'}{(\mu_1^2+n'^2)(\mu_2^2+n'^2)}\left[m^2(\mu_1^2+\mu_2^2)-(2-\nu)\left(\frac{a}{b}\right)\mu_1^2\mu_2^2+\left\{n'^2(1-\nu(2-\nu))-\nu\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right\}m^2\right]$$

$$\mathbb{Y}_{m'n}=\frac{-2a}{b}\frac{m'n}{(\lambda_1^2+m'^2)(\lambda_2^2+m'^2)}\left[n^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)-(2-\nu)\left(\frac{b}{a}\right)\lambda_1^2\lambda_2^2+\left\{m'^2(1-\nu(2-\nu))-\nu\left(\frac{na}{b}\right)^2\right\}n^2\right]$$

$$\mathbb{M}_m=\frac{1}{\mu_1^2-\mu_2^2}\left[\mu_1\left\{\mu_1^2-(2-\nu)\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right\}\coth\pi\mu_1-\mu_2\left\{\mu_2^2-(2-\nu)\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right\}\coth\pi\mu_2\right],\ \mathbb{N}_m=\frac{-1}{\mu_1^2-\mu_2^2}\left[\mu_1\left\{\mu_1^2-(2-\nu)\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right\}\operatorname{cosech}\pi\mu_1-\mu_2\left\{\mu_2^2-(2-\nu)\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right\}\operatorname{cosech}\pi\mu_2\right]$$

$$\mathbb{Q}_m=\frac{-\pi}{\mu_1^2-\mu_2^2}\left[\mu_1\left\{\mu_1^2-(2-\nu)\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right\}\left\{\mu_2^2-\nu\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right\}\operatorname{cosech}\pi\mu_1-\mu_2\left\{\mu_2^2-(2-\nu)\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right\}\left\{\mu_1^2-\nu\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right\}\operatorname{cosech}\pi\mu_2\right]$$

2．連続条件および端辺条件

図－２のごとき座標を図－１の二方向連続板の各ブロックの矩形板ごとに設け，$x_{i\cdot j}=a_i$，$y_{i\cdot j}=b_j$ なる節線がそれぞれ $x_{i+1\cdot j}=0$，$y_{i\cdot j+1}=0$ と一致するごとく定めれば各ブロックごとに材端のたわみ角係数 $\theta_{i\cdot j\cdot An},\theta_{i\cdot j\cdot Bn},\theta_{i\cdot j\cdot Cm},\theta_{i\cdot j\cdot Dm}$ 端モーメント係数 $M_{i\cdot j\cdot An},M_{i\cdot j\cdot Bn},M_{i\cdot j\cdot Cm},M_{i\cdot j\cdot Dm}$ 反力係数 $V_{i\cdot j\cdot An},V_{i\cdot j\cdot Bn},V_{i\cdot j\cdot Cm}$ $V_{i\cdot j\cdot Dm}$たわみ係数 $\delta_{i\cdot j\cdot An},\delta_{i\cdot j\cdot Bn},\delta_{i\cdot j\cdot Cm},\delta_{i\cdot j\cdot Dm}$が前記１の内容で定義される。ブロック$i,j$板とブロック$i+1,j$板およびブロック$i,j+1$板の節線$i+1$および節線$\overline{j+1}$では$M_{i\cdot j\cdot Bn}=M_{i+1\cdot j\cdot An}=M_{i+1\cdot j\cdot n}$，$M_{i\cdot j\cdot Dm}=M_{i\cdot j+1\cdot Cm}=M_{i\cdot j+1\cdot m}$，$\delta_{i\cdot j\cdot Bn}=\delta_{i+1\cdot j\cdot An}=\delta_{i+1\cdot j\cdot n}$，$\delta_{i\cdot j\cdot Dm}=\delta_{i\cdot j+1\cdot Cm}=\delta_{i\cdot j+1\cdot m}$となり，これらを考慮してたわみ角の連続条件式 $\theta_{i-1\cdot j\cdot Bn}=\theta_{i\cdot j\cdot An}$，$\theta_{i\cdot j-1\cdot Dm}=\theta_{i\cdot j\cdot Cm}$をたてれば次の関係式が$i=1,2,3\cdots\cdots,I$（Iは$x$方向の連続板の径間数），$j=1,2,3\cdots\cdot,J$（Jは$y$方向の連続板の径間数）に対して成立する．

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathbb{B}_{i\cdot j\cdot n}}{D\pi}a_iM_{i\cdot j\cdot n}+\left(\frac{\mathbb{A}_{i+1\cdot j\cdot n}}{D\pi}a_{i+1}+\frac{\mathbb{A}_{i\cdot j\cdot n}}{D\pi}a_i\right)M_{i+1\cdot j\cdot n}+\frac{\mathbb{B}_{i+1\cdot j\cdot n}}{D\pi}a_{i+1}M_{i+2\cdot j\cdot n}+\mathbb{D}_{i\cdot j\cdot n}\frac{\delta_{i\cdot j\cdot n}}{a_i}+\left(\frac{\mathbb{C}_{i+1\cdot j\cdot n}}{a_{i+1}}+\frac{\mathbb{C}_{i\cdot j\cdot n}}{a_i}\right)\delta_{i+1\cdot j\cdot n}+\mathbb{D}_{i+1\cdot j\cdot n}\frac{\delta_{i+2\cdot j\cdot n}}{a_{i+1}}\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathbb{E}_{i+1\cdot j\cdot mn}\frac{b_{i+1\cdot j}}{D\pi}\left(M_{i+1\cdot j\cdot m}-(-1)^{n}M_{i+1\cdot j+1\cdot m}\right)-(-1)^m\mathbb{E}_{i\cdot j\cdot mn}\frac{b_{i\cdot j}}{D\pi}\left(M_{i\cdot j\cdot m}-(-1)^{n}M_{i\cdot j+1\cdot m}\right)\right]\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathbb{F}_{i+1\cdot j\cdot mn}\left(\frac{\delta_{i+1\cdot j\cdot m}}{b_{i+1\cdot j}}-(-1)^{n}\frac{\delta_{i+1\cdot j+1\cdot m}}{b_{i+1\cdot j}}\right)-(-1)^m\mathbb{F}_{i\cdot j\cdot mn}\left(\frac{\delta_{i\cdot j\cdot m}}{b_{i\cdot j}}-(-1)^{n}\frac{\delta_{i\cdot j+1\cdot m}}{b_{i\cdot j}}\right)\right]=0\\
&\frac{\mathbb{H}_{i\cdot j\cdot m}}{D\pi}b_jM_{i\cdot j\cdot m}+\left(\frac{\mathbb{G}_{i\cdot j+1\cdot m}}{D\pi}b_{j+1}+\frac{\mathbb{G}_{i\cdot j\cdot m}}{D\pi}b_j\right)M_{i\cdot j+1\cdot m}+\frac{\mathbb{H}_{i\cdot j+1\cdot m}}{D\pi}b_{j+1}M_{i\cdot j+2\cdot m}+\mathbb{J}_{i\cdot j\cdot m}\frac{\delta_{i\cdot j\cdot m}}{b_j}+\left(\frac{\mathbb{I}_{i\cdot j+1\cdot m}}{b_{j+1}}+\frac{\mathbb{I}_{i\cdot j\cdot m}}{b_j}\right)\delta_{i\cdot j+1\cdot m}+\mathbb{J}_{i\cdot j+1\cdot m}\frac{\delta_{i\cdot j+2\cdot m}}{b_{j+1}}\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathbb{K}_{i\cdot j+1\cdot mn}\frac{a_{i\cdot j+1}}{D\pi}\left(M_{i\cdot j+1\cdot n}-(-1)^{m}M_{i+1\cdot j+1\cdot n}\right)-(-1)^n\mathbb{K}_{i\cdot j\cdot mn}\frac{a_{i\cdot j}}{D\pi}\left(M_{i\cdot j\cdot n}-(-1)^{m}M_{i+1\cdot j\cdot n}\right)\right]\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathbb{L}_{i\cdot j+1\cdot mn}\left(\frac{\delta_{i\cdot j+1\cdot n}}{a_{i\cdot j+1}}-(-1)^{m}\frac{\delta_{i+1\cdot j+1\cdot n}}{a_{i\cdot j+1}}\right)-(-1)^n\mathbb{L}_{i\cdot j\cdot mn}\left(\frac{\delta_{i\cdot j\cdot n}}{a_{i\cdot j}}-(-1)^{m}\frac{\delta_{i+1\cdot j\cdot n}}{a_{i\cdot j}}\right)\right]=0
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

いま連続板は中間節線で単純支持されるものとすれば，連続板の周辺自由時に限り式(10)のδはブロックの端辺が自由なる場合のみ考慮すればよく中間節線上のδはすべて消滅する．

式(10)に加えて端辺条件式として次式が成り立つ．すなわちブロック$1,j$板の節線1を例にとって示せば．

(1)単純支持された場合

$$M_{1\cdot j\cdot n}=\delta_{1\cdot j\cdot n}=0$$

(2)固定された場合

$$\delta_{1\cdot j\cdot n}=0,\ \theta_{1\cdot j\cdot n}=\mathbb{A}_{1\cdot j\cdot n}\frac{M_{1\cdot j\cdot n}}{D\pi}a_1+\mathbb{B}_{1\cdot j\cdot n}\frac{M_{2\cdot j\cdot n}}{D\pi}a_1+\mathbb{C}_{1\cdot j\cdot n}\frac{\delta_{1\cdot j\cdot n}}{a_1}+\mathbb{D}_{1\cdot j\cdot n}\frac{\delta_{2\cdot j\cdot n}}{a_1}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathbb{E}_{1\cdot j\cdot mn}\frac{b_{1\cdot j}}{D\pi}\left(M_{1\cdot j\cdot m}-(-1)^{n}M_{1\cdot j+1\cdot m}\right)+\mathbb{F}_{1\cdot j\cdot mn}\left(\frac{\delta_{1\cdot j\cdot m}}{b_{1\cdot j}}-(-1)^{n}\frac{\delta_{1\cdot j+1\cdot m}}{b_{1\cdot j}}\right)\right]=0$$

(3)自由の場合

$$N_x\left(\mathbb{A}_{1\cdot j\cdot n}\frac{M_{1\cdot j\cdot n}}{D\pi}a_1+\mathbb{B}_{1\cdot j\cdot n}\frac{M_{2\cdot j\cdot n}}{D\pi}a_1+\mathbb{C}_{1\cdot j\cdot n}\frac{\delta_{1\cdot j\cdot n}}{a_1}+\mathbb{D}_{1\cdot j\cdot n}\frac{\delta_{2\cdot j\cdot n}}{a_1}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathbb{E}_{1\cdot j\cdot mn}\frac{b_{1\cdot j}}{D\pi}\left(M_{1\cdot j\cdot m}-(-1)^{n}M_{1\cdot j+1\cdot m}\right)+\mathbb{F}_{1\cdot j\cdot mn}\left(\frac{\delta_{1\cdot j\cdot m}}{b_{1\cdot j}}-(-1)^{n}\frac{\delta_{1\cdot j+1\cdot m}}{b_{1\cdot j}}\right)\right]\right)$$
$$+\frac{\pi^2}{a^2}D\left(\mathbb{R}_{1\cdot j\cdot n}\frac{M_{1\cdot j\cdot n}}{D\pi}a_1+\mathbb{S}_{1\cdot j\cdot n}\frac{M_{2\cdot j\cdot n}}{D\pi}a_1+\mathbb{T}_{1\cdot j\cdot n}\frac{\delta_{1\cdot j\cdot n}}{a_1}+\mathbb{U}_{1\cdot j\cdot n}\frac{\delta_{2\cdot j\cdot n}}{a_1}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathbb{V}_{1\cdot j\cdot mn}\frac{b_{1\cdot j}}{D\pi}\left(M_{1\cdot j\cdot m}-(-1)^{n}M_{1\cdot j+1\cdot m}\right)+\mathbb{W}_{1\cdot j\cdot mn}\left(\frac{\delta_{1\cdot j\cdot m}}{b_{1\cdot j}}-(-1)^{n}\frac{\delta_{1\cdot j+1\cdot m}}{b_{1\cdot j}}\right)\right]\right)=0$$

$$M_{1\cdot j\cdot n}=0\qquad(11)$$

他の端辺についても全く同様の条件式が成立する．よって式(10)および端辺条件式(11)がすべては０でな

い$M_{i,j,n}$, $M_{i,j,m}$, $\delta_{i,j,n}$, $\delta_{i-1,m}$, $\delta_{i+1,j,n}$, $\delta_{i,j+1,m}$をもつためには，これら諸式の係数行列式が0となるいわゆる座屈条件式が成立しこれより所要の座屈荷重が決定される。

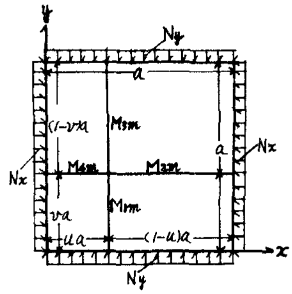
3．計算例

図―3のごとく4周辺が単純支持された二方向連続板が周辺直圧力N_xおよびN_yをうける場合の座屈荷重を求めてみる。端辺条件を考慮して中間節線における連続条件式(10)をたてれば次のごとくなる。

$$\left.\begin{aligned}
&((1-u)A_{2n}+uA_{1n})\frac{a}{D\pi}M_{1n} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{n}vE_{2mn}\frac{a}{D\pi}M_{2m} + 0 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{n}(-1)^{m}vE_{1mn}\frac{a}{D\pi}M_{4m}=0\\
&-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{n}(1-u)K_{2mn}\frac{a}{D\pi}M_{1n} + ((1-v)G_{4mn}+vG_{2mn})\frac{a}{D\pi}M_{2m} + \sum_{n=1}^{\infty}(1-u)K_{4mn}\frac{a}{D\pi}M_{3n} + 0 = 0\\
&0 + \sum_{m=1}^{\infty}(1-v)E_{4mn}\frac{a}{D\pi}M_{2m} + ((1-u)A_{4n}+uA_{3n})\frac{a}{D\pi}M_{3n} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m}(1-v)E_{3mn}\frac{a}{D\pi}M_{4m}=0\\
&\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(-1)^{n}uK_{1mn}\frac{a}{D\pi}M_{1n} + 0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m}uK_{3mn}\frac{a}{D\pi}M_{3n} + ((1-v)G_{3n}+vG_{1m})\frac{a}{D\pi}M_{4m}=0
\end{aligned}\right\}\quad (12)$$

座屈条件式は，式(12)の係数行列式＝0 とおいてえられる。

まず$u=v=0.5$で二方向圧縮力N_x, N_yが作用する場合を考え，上記座屈条件式を満足するN_x, N_yの相関関係をプロットすれば図―4の結果をうる。すなわちN_x, N_yの無次元量P, Qに対して$P+Q=16$の直線式が成立し　特例として$P=0$ または　$Q=0$ の一方向圧縮に対する最小座屈荷重が，それぞれ$Q=16$ または，$P=16$として求められる。

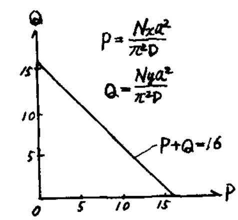


図―3

次にvを0.5に固定　uを0.3～0.7の範囲で変化させた場合の一方向圧縮（$N_y=0$）に対する最小座屈荷重を算定し　結果を表―1にまとめて示した。同表より明らかなごとく$u=0.5$　すなわち連続板のスパンが相等しい場合に座屈荷重は最小となり，上例で述べた$P=16$に一致する。

u	$P\left(=\frac{N_x a^2}{D\pi^2}\right)$
0.3	18.3
0.4	17.2
0.5	16.0
0.6	17.2
0.7	18.3

表―1



図―4

結語　本研究は端辺が単純支持，固定もしくは自由で中間節線が単純に支持される二方向連続等方性矩形板が二方向からの周辺直圧力を受ける場合の座屈荷重算定式を誘導し，簡単な計算例を示したものである。座屈条件式たる多元行列式の計算は旧来の手計算では到底不可能であるが，電子計算機を利用すれば予め準備された行列式計算のサブルーチンに直結させて迅速かつ高精度に座屈荷重を求めることができる．なお二方向連続板の特例として一方向連続板の解析が可能であることはいうまでもなく，たとえば$M_{cm}=M_{Dm}=\delta_{cm}=\delta_{Dm}=0$ とおけば一対辺単純支持，$\theta_{cm}=\theta_{Dm}=\delta_{cm}=\delta_{Dm}=0$とおけば一対辺固定，さらに$M_{cm}=M_{Dm}=V_{cm}=V_{Dm}=0$ とおけば一対辺自由の一方向連続板の座屈荷重がそれぞれ算定される。

（参考文献）(1) 倉田宗章："多径間連続板の座屈荷重計算法"　土木学会論文集　第6号　昭和26年8月

(2) 山崎彦坂："一対辺自由なる一方向連続矩形板の安定"　第21回土木学会年次学術講演会講演概要 昭和41年