

矩形板の変形公式

九州大学 正 員 山崎 徳也

" 学生員 太田 俊昭

" 学生員 〇馬場光勝弘

1. 序言 変形法による板解法の一つとしてこれを格子構造で置換して解く方法¹⁾が知られているが、あまり顧り見られていない。その理由は、精度をあげるために格子の格間長を相当小さくしなければならぬため、全体の節点数が必然的に多くなり、電子計算機を利用する場合のプログラム作製時に於いて、境界条件に応じ節点ごとによりおよびモーメントの釣合式を求めて、膨大な数におよぶ多元連立方程式の係数をいろいろ確定しなければならず、それによってその手間が極めて煩わしいばかりか、誤りを犯す可能性も著しく大なる点にある。これらの難点を排除するために著者らは、上記釣合方式自動的に作製するプログラムを考案し、これを用いて弾性支承を有する矩形板の変形公式を求め、板と梁とで構成される一般構造物を極めて簡単な代数的解析手法である変形法によって解くことを試みた。本論文はそういう板の面外変形に関する解析を提示するものである。

2. 置換格子の剛度 いま、図-1(a),(b)に示すごとく λ 幅の微小矩形板と、これと力学的に等価な格子構造とを考え、格子構造部材の曲げ剛性 EI_c, EI_s とはり曲げ剛性 GI_c, GI_s と曲げおよびはりモーメントによる両者の変形が等しいという条件より、それぞれ次のごとく決定する。ただし、格子構造の材料ははりには抵抗しないものとする。まず、微小矩形板のモーメントと回転角の関係は次式で与えられる。

(図-1 (b),(c),(d)参照)

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{K\lambda M_1}{(k^3/12)E}, & \theta_2 &= \frac{\mu\lambda M_1}{(k^3/12)E}, & \theta_3 &= \frac{\lambda M_2}{(k^3/12)E} \\ \theta_4 &= \frac{\mu K\lambda M_2}{(k^3/12)E}, & \theta_5 &= \frac{(1+\mu)\lambda KH}{(k^3/12)E} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし、 k は矩形板の厚さ、 μ はポアソン比。一方、格子構造では、これらの関係は次のごとく与えられる。(図-1 (b),(c),(d)参照)

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\lambda^3 K M_1}{2E} \cdot \frac{I^3 I_s + I_c}{I^3 I_c I_s + I_c I_s + K^3 I_c I_s}, & \theta_2 &= \frac{\lambda^3 K M_1}{2E} \cdot \frac{I_c}{I^3 I_c I_s + I_c I_s + K^3 I_c I_s} \\ \theta_4 &= \frac{\lambda^3 K M_2}{2E} \cdot \frac{I^3 I_c + K^3 I_s}{I^3 I_c I_s + I_c I_s + K^3 I_c I_s}, & \theta_5 &= \frac{\lambda^3 K M_2}{2E} \cdot \frac{I_s}{I^3 I_c I_s + I_c I_s + K^3 I_c I_s} \\ \theta_6 &= \frac{H I^3 K \lambda^2}{2E (I^3 (GI_c)/E + 2 I_c k)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

明らかに、 $\theta_1 = \theta_4, \theta_2 = \theta_5, \theta_3 = \theta_6, \theta_4 = \theta_7, \theta_5 = \theta_8, \theta_6 = \theta_9$ であるゆえ、式(1),(2)より、格子構造部材の

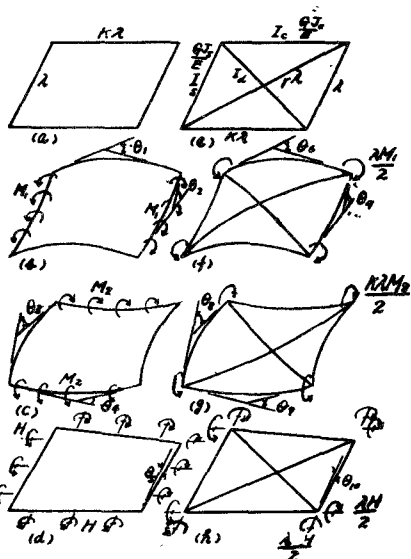


図-1

曲げおよび捩り剛性が次のごとく定められる。

$$\left. \begin{aligned} EI_y &= \frac{(K^2 - \mu)\lambda}{2K(1-\mu^2)} \frac{Eh^3}{12}, & EI_z &= \frac{(1-K^2)\lambda}{2(1-\mu^2)} \frac{Eh^3}{12}, & EI_{yz} &= \frac{\mu\lambda}{2K(1-\mu^2)} \frac{Eh^3}{12} \\ GI_x &= \frac{(1-3\mu)\lambda}{2(1-\mu^2)} \frac{Eh^3}{12}, & GI_y &= \frac{K(1-3\mu)\lambda}{2(1-\mu^2)} \frac{Eh^3}{12} \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

特に $K=1$ の正方形板において $\mu=0.3$ とすれば、式(3)の I, J はそれぞれ次の値となる。

$$I_y = I_z = I = (\lambda h^3/24) \times 1.3, \quad I_{yz} = (\lambda h^3/24) \times 0.1, \quad J_y = J_z = J = (\lambda h^3 E/24G) \times 0.1$$

3. 単位格子構造の Stiffness Matrix 板構造物を格子構造で置換する場合、その構成単位とし

2図-2のごとき正方形の単位格子構造を採用すれば、以後の計算が極め

て簡便となる。ここで、曲げ部材には周知の直線材たわみ角式、捩り部

材には捩り角式を適用して、節点 A, B, C および D で、力およびモーメントの釣合式を立てれば、上記単位格子の変形公式が次のごとくえられる。

(力は x 方向に正、モーメントは x, y の負軸に角を時計回りと正とする。)

すなわち節点 A で、力およびモーメントの釣合式を求めればそれぞ

れ、 $\sum \lambda P_i = \lambda P_A$, $\sum M_{Ai} = M_A^x$, $\sum M_{Ai}^y = M_A^y$ (これは B, C および D の一般表示とする。)

上式を整理すれば、

$$\left. \begin{aligned} \lambda P_A &= (24K_0 + 6K_1)\bar{\delta}_A + (6K_0 + 3K_1)\bar{\theta}_A^x + (6K_0 + 3K_1)\bar{\theta}_A^y - 12K_0\bar{\delta}_0 + 6K_0\bar{\theta}_0^x - 6K_0\bar{\theta}_0^y + 3K_1\bar{\theta}_0^x \\ &\quad - 12K_0\bar{\delta}_0 + 6K_0\bar{\theta}_0^x + C_{A0} + C_{A1} + (C_{A2} + C_{A3})/\sqrt{2} - \lambda(P_{A0} + P_{A1} + P_{A2}) \\ M_A^x &= (6K_0 + 3K_1)\bar{\delta}_A + (4K_0 + 2K_1 + K_2)\bar{\theta}_A^x + 2K_1\bar{\theta}_A^y - K_0\bar{\theta}_0^x - 3K_1\bar{\theta}_0^y + K_1\bar{\theta}_0^x + K_1\bar{\theta}_0^y \\ &\quad + 2K_0\bar{\theta}_0^x + C_{A0} + C_{A1}/\sqrt{2} \\ M_A^y &= (6K_0 + 3K_1)\bar{\delta}_A + 2K_1\bar{\theta}_A^x + (4K_0 + 2K_1 + K_2)\bar{\theta}_A^y - 6K_0\bar{\delta}_0 + 2K_0\bar{\theta}_0^x - 3K_1\bar{\theta}_0^y + K_1\bar{\theta}_0^x + K_1\bar{\theta}_0^y \\ &\quad - K_2\bar{\theta}_0^y + C_{A0} + C_{A1}/\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

に $K_0 = EI/\lambda$, $K_1 = EI_{yz}/\lambda$, $K_2 = GJ/\lambda$, $\bar{\delta} = \delta/\lambda$ とする。以下同様にして、節点 B, C および

D で釣合式を立て、これらの結果をまとめてマトリックス表示すれば、結局次式をうる。

$$\begin{bmatrix} \lambda P_A \\ M_A^x \\ M_A^y \\ \lambda P_B \\ M_B^x \\ M_B^y \\ \lambda P_C \\ M_C^x \\ M_C^y \\ \lambda P_D \\ M_D^x \\ M_D^y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{A0} \\ C_{A1} \\ C_{A2} \\ C_{A3} \\ C_{B0} \\ C_{B1} \\ C_{C0} \\ C_{C1} \\ C_{C2} \\ C_{D0} \\ C_{D1} \\ C_{D2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CC & BB & BB & -12K_0 & 0 & 6K_0 & -6K_0 & 3K_1 & 3K_1 & -12K_0 & 6K_0 & 0 \\ BB & AA & 2K_1 & 0 & -K_2 & 0 & -3K_1 & K_1 & K_1 & -6K_0 & 2K_0 & 0 \\ BB & 2K_1 & AA & -6K_0 & 0 & 2K_0 & -3K_1 & K_1 & K_1 & 0 & 0 & -K_2 \\ -12K_0 & 0 & -6K_0 & CC & BB & -BB & -12K_0 & 6K_0 & 0 & -6K_0 & 3K_1 & -3K_1 \\ 0 & -K_2 & 0 & BB & AA & -2K_1 & -6K_0 & 2K_0 & 0 & -3K_1 & K_1 & -K_1 \\ 6K_0 & 0 & 2K_0 & -BB & -2K_1 & AA & 0 & 0 & -K_2 & 3K_1 & -K_1 & K_1 \\ -6K_0 & -3K_1 & -3K_1 & -12K_0 & -6K_0 & 0 & CC & -BB & -BB & -12K_0 & 0 & -6K_0 \\ 3K_1 & K_1 & K_1 & 6K_0 & 2K_0 & 0 & -BB & AA & 2K_1 & 0 & K_2 & 0 \\ 3K_1 & K_1 & K_1 & 0 & 0 & -K_2 & -BB & 2K_1 & AA & 6K_0 & 0 & 2K_0 \\ -12K_0 & -6K_0 & 0 & -6K_0 & -3K_1 & 3K_1 & -12K_0 & 0 & 6K_0 & CC & -BB & BB \\ 6K_0 & 2K_0 & 0 & 3K_1 & K_1 & -K_1 & 0 & -K_2 & 0 & -BB & AA & -2K_1 \\ 0 & 0 & -K_2 & -3K_1 & -K_1 & K_1 & -6K_0 & 0 & 2K_0 & BB & -2K_1 & AA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\delta}_A \\ \bar{\theta}_A^x \\ \bar{\theta}_A^y \\ \bar{\delta}_B \\ \bar{\theta}_B^x \\ \bar{\theta}_B^y \\ \bar{\delta}_C \\ \bar{\theta}_C^x \\ \bar{\theta}_C^y \\ \bar{\delta}_D \\ \bar{\theta}_D^x \\ \bar{\theta}_D^y \end{bmatrix} \dots (5)$$

Kを、 $AA=4K_0+2K_1+K_2$, $BB=6K_0+3K_1$, $CC=24K_0+6K_1$, 7Kの11項重項を一般化して表わし得るものである。

さて、力およびモーメントを $(F)=(AP \ MP \ MY)^T$ と、変形成分を $(U)=(\bar{U} \ \theta^x \ \theta^y)^T$ と一般表示すれば、式(9)は次のごとく変形される。

$$(F)=\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \\ F_D \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} & K_{AC} & K_{AD} \\ K_{BA} & K_{BB} & K_{BC} & K_{BD} \\ K_{CA} & K_{CB} & K_{CC} & K_{CD} \\ K_{DA} & K_{DB} & K_{DC} & K_{DD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \\ U_D \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (10)$$

ここに $K_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta=A, B, C, D$) は 3×3 の小行列で、式(9)の係数行列において点線によって分割された各ブロックに相当する。7K (F) は荷重項に関する値を含むものとする。

4. 変形公式の誘導 板と縦梁に等間隔に分割して格子構造に置換するに当り、 i 列 j 行にある単位格子のブロック番号を便宜上 (i, j) と表わし、そのブロックの左下の格子節点を同じく (i, j) と一般表示するものとする。(図-3参照)。さて、格子構造の任意の節点 A における一変力 F の釣合式を求めれば、図-3より次式で与えられる。

$$A(F_j^i)_A + B(F_j^{i-1})_B + C(F_{j-1}^{i-1})_C + D(F_{j-1}^i)_D + (\bar{F}_j^i) = 0 \quad (11)$$

ここに上式(11)は x 方向の力の釣合式および y, z 両軸に関するモーメントの釣合式を包含して一般的に表示したものである。

一方、式(10)より、

$$(F_j^i)_A = (K_{AA} \ K_{AB} \ K_{AC} \ K_{AD}) [(U_j^i)_A \ (U_j^i)_B \ (U_j^i)_C \ (U_j^i)_D]^T \quad \dots\dots (12)$$

Kを、 $\alpha=A, B, C, D$ 7K式(10)の変形成分 $(U_j^i)_A$ は図-3のようなごとく一般的に格子節点番号で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} (U_j^i)_A &= U_j^i, & (U_j^{i-1})_A &= U_j^{i-1}, & (U_{j-1}^{i-1})_A &= U_{j-1}^{i-1}, & (U_{j-1}^i)_A &= U_{j-1}^i \\ (U_j^i)_B &= U_j^{i+1}, & (U_j^{i-1})_B &= U_j^i, & (U_{j-1}^{i-1})_B &= U_{j-1}^{i-1}, & (U_{j-1}^i)_B &= U_{j-1}^{i-1} \\ (U_j^i)_C &= U_{j+1}^{i+1}, & (U_j^i)_C &= U_{j+1}^i, & (U_{j-1}^{i-1})_C &= U_j^i, & (U_{j-1}^i)_C &= U_j^{i+1} \\ (U_j^i)_D &= U_{j+1}^i, & (U_j^i)_D &= U_{j+1}^{i-1}, & (U_{j-1}^{i-1})_D &= U_j^{i-1}, & (U_{j-1}^i)_D &= U_j^i \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(11)に式(12)を代入のうえ整理すれば、次式となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & AK_{AA} & AK_{AB} & 0 & AK_{AC} & AK_{AD} \\ 0 & 0 & 0 & BK_{AA} & BK_{AB} & 0 & BK_{AC} & BK_{AD} & 0 \\ CK_{AA} & CK_{AB} & 0 & CK_{AC} & CK_{AD} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & DK_{AA} & DK_{AB} & 0 & DK_{AC} & DK_{AD} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [U_{j-1}^{i-1} \ U_{j-1}^i \ U_j^{i-1} \ U_j^i \ U_j^{i+1} \ U_{j+1}^{i-1} \ U_{j+1}^i \ U_{j+1}^{i+1}]^T + (\bar{F}_j^i) = 0 \quad \dots\dots (14)$$

したがって、板全体の釣合式は次のとき連立方程式として求められる。(図-4参照)

$$[(SK)_{j+1}^{i+1} \ (SK)_{j+1}^i \ (SK)_{j+1}^{i-1} \ (SK)_{j+1}^{i-2} \ (SK)_{j+1}^{i-3} \ (SK)_{j+1}^{i-4} \ (SK)_{j+1}^{i-5} \ (SK)_{j+1}^{i-6} \ (SK)_{j+1}^{i-7}]^T + (\bar{F}_j^i) = 0 \quad (15)$$

Kを、 $i=1, 2, \dots, p$, $j=1, 2, \dots, q$, $(\bar{F}_j^i) = (\bar{F}_j^i)_A + A\bar{G}_i + B\bar{G}_j + C\bar{G}_C + D\bar{G}_D$, $\bar{G} = (G_1, G_2, G_3)^T$

$$\left. \begin{aligned} (SK)_{j+1}^{i+1} &= CK_{AA} + TLK_{AB}^*, & (SK)_{j+1}^i &= CK_{AB} + DK_{AA} + TLK_{AC}^* + TLK_{AD}^* + TLK_{CB}^* \\ (SK)_{j+1}^{i-1} &= DK_{AA} + TLK_{AB}^* + TLK_{CA}^* + TLK_{CB}^*, & (SK)_{j+1}^{i-2} &= BK_{AA} + CK_{CB} + TLK_{CA}^* \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} (SK)_{ij}^* &= AK_{Ai} + BK_{Aj} + CK_{Kc} + DK_{Kd} + TuK_{Ai}^* + TuK_{Aj}^* + T_LK_{Kc}^* + T_LK_{Kd}^* - T_LTuK_{Kd} \\ (SK)_{ij}^{*'} &= DK_{Kc} + AK_{Kd} + TuK_{Ai}^* + T_LK_{Aj}^* + T_LK_{Kc}^*, \quad (SK)_{ij+1}^{*'} = BK_{Kd} \\ (SK)_{j+1i}^{*'} &= AK_{Kd} + BK_{Kc} + T_LK_{Kc}^*, \quad (SK)_{j+1i}^{*'} = AK_{Kc} + T_LK_{Kc}^* \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

次に、式(12)の係数 A, B, C, D, T_L および Tu は、板の周辺の境界条件によって定まる係数で、一例を示せば次のとおり内容をもつ。すなわち、対称線上の各節点においては

$$(i) \text{ 上下対称: } A=B=T_L=0, \quad C=D=Tu=1$$

$$(ii) \text{ 左右対称: } A=D=T_L=1, \quad C=B=Tu=0$$

$$(iii) \text{ 上下、左右非対称: } A=B=C=0, \quad D=Tu=T_L=1$$

次に各節点の変形成分に関する添字を更けて通し番号 N で示せば、図-3, 4を参照して $N=3\{j(i+1)+i-1\}+1$ なる関係式が成立つ。ゆえ、式(11)より容易に所要の連立方程式の係数行列が構成される。

$$[SK] \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \vdots \\ \bar{F}_m \end{Bmatrix} \quad \therefore \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{Bmatrix} = [SK]^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \vdots \\ \bar{F}_m \end{Bmatrix} \quad \dots \dots (13)$$

$$K \text{ K' L, } [SK] = [SK]^{-1}$$

さて、例として、図-5に示すごとく2点 E, F で弾性支持された周辺任意境界条件の板の変形公式を求めれば以下のごとくである。すなわち、点 E, F の通し番号をそれぞれ $N=1, 5$ とすれば、これらの点の変形成分 U_1, U_5 は式(13)より

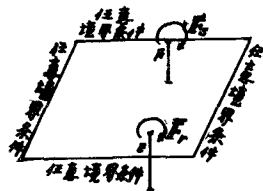


図-5

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_5 \end{Bmatrix} = [SK]^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_5 \end{Bmatrix} = \sum_N \begin{bmatrix} SK_{rN} \\ SK_{sN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_N \end{Bmatrix} \quad \dots \dots (14)$$

よって式(14)より E, F に弾性支承をもつ板の変形公式が結局次式でえられることとなる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_5 \end{Bmatrix} = [SK]^{-1} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_5 \end{Bmatrix} + \sum_N [SK]^{-1} \begin{bmatrix} SK_{rN} \\ SK_{sN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_N \end{Bmatrix} \quad \dots \dots (15) \quad K \text{ K' L, } [SK] = \begin{bmatrix} SK_{rr} & SK_{rs} \\ SK_{sr} & SK_{ss} \end{bmatrix}$$

かかる構造物を解くには上式(16)と柱に関する慣用たわみ角式とを併用の上 E, F 両点で力およびモーメントの釣合式をたてればよい。

5. 結び 本法の特色を挙げれば以下のごとく要約される。すなわち、

(i) 本法によれば周辺の境界条件の如何を問はず、一貫してプログラムで、自動的に所要の連立方程式の係数行列を構成しうること。

(ii) P, Q の数は任意であり、節点数の多少は全く問題でなく、冒険の懸念を一掃しえらこと。

(iii) 式(14)によって無梁板の一般的解法もまた可能となったこと。

(iv) 弾性支承の数ならびにその位置を任意に選べるゆえ、本プログラムによって、各種変形公式が一挙に求められようになつたこと。

(v) 上記変形公式を用うることによって、なんら板としての特別な配慮をしなくても、これまでも手馴れた、骨組構造に対するたわみ角法の手法をそのまま活用して、梁と板とで構成される不静定構造物を容易に解析することが可能になつたこと。

(文献) 1) A. L. Yottram and H. M. Husain Grid-Frame-work Method for Plates in Flexure, Proc. of the A.S.C.E., 91, NO. EM. 3, June, 1965