

無梁板の解法

(一対辺が固定または単純支持されかつ中間柱にて点支持される場合)

九州大学 正 員 山崎徳也

九州大学 正 員 柳木 武

九州大学 学生員 O 今岡亮司

1 緒言

著者らは先に連続はりおよびラーメンの解法にフーリエ級数を用いた⁽¹⁾、これを平板問題に應用拡張して、板周辺が単純支持され、かつ任意配列したがって任意間隔の中間支柱にて支持される無梁板に任意垂直荷重が作用する場合の厳密理論解を発表し⁽²⁾、既往の諸研究⁽³⁾よりも広汎な構造形式および荷重状態の無梁板の解析を可能ならしめるとともに、本法が簡単な多元連立一次方程式にもとずいて未知不静定反力を直接求めつること、必要とあらば任意点の変位量を未知不静定反力と同時に簡単⁽⁴⁾に求めえ、また逆に中間支点の支点沈下の問題を解きうる等々の適用が多面的であること等の優れた利点をもつことを述べたが、さらに、同様の手法によって板周辺が任意境界条件によって支持される無梁板の解析を行うことができ、本研究は無梁板解法の第二報として、一対辺が単純支持され、他対辺が固定または単純支持され、かつ中間にて点支持される無梁板の解法を提示せんとするものである。

2 解法

(1)板のたわみ曲面式 図-1に示すことく矩形板A B C Dに直交座標系(x, y, z)を導入し、辺A B, C Dが単純支持されるものとする。しかるとき、板面に対して垂直な任意荷重q(x, y)が作用するものとすれば板のz軸方向のたわみw(x, y)は一般に次式で表わされる。

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \{ A_m \sinh \beta_m x + B_m x \sinh \beta_m x + C_m \cosh \beta_m x + D_m x \cosh \beta_m x \} \sin \beta_m y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (1)$$

$$\text{ここに } \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \beta_n = \frac{n\pi}{b}, G_{mn} = \frac{f_{mn}}{D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}$$

$$f_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y dy dx, \quad D: \text{板剛度 } (Eh^3/12(1-\nu^2)), \quad E: \text{板の弾性係数}$$

$$h: \text{板の厚さ}, \quad \nu: \text{板のポアソン比}$$

辺A CおよびB Dにおいて、端モーメントM_A(y)およびM_B(y) (図-1に示す方向を正とする) が作用し、かつ沈下δ_A(y)およびδ_B(y)を起すものとすれば辺A C, B Dの境界条件は次のとおりである。

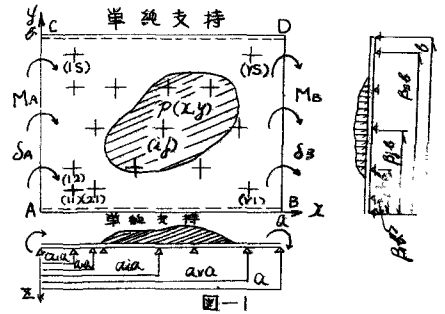
$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ で } w(a, y) &= \delta_A(y), & M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} = M_A(y) \\ x=a \text{ で } w(a, y) &= \delta_B(y), & M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = -M_B(y) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

δ_A(y), δ_B(y), M_A(y), M_B(y)はyに関する任意関数で次のことく正弦フーリエ級数にて表わしうるものと仮定する。

$$\delta_A(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{An} \sin \beta_n y, \quad \delta_B(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{Bn} \sin \beta_n y, \quad M_A(y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{An} \sin \beta_n y, \quad M_B(y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{Bn} \sin \beta_n y \quad (3)$$

式(3)および式(1)を式(2)に代入すれば次のことき連立方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin \beta_n y &= \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{An} \sin \beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \{ A_m \sinh \beta_m a + B_m a \sinh \beta_m a + C_m \cosh \beta_m a + D_m a \cosh \beta_m a \} \sin \beta_n y &= \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{Bn} \sin \beta_n y \\ -D \sum_{m=1}^{\infty} \{ B_m \alpha_m^2 \beta_n + C_m \beta_n^2 (1-\nu) \} \sin \beta_n y &= \sum_{m=1}^{\infty} M_{An} \sin \beta_n y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$



$$-D \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \beta_n^2 (1-\nu) \sinh \beta_n l_m + B_n (2\beta_n \cosh \beta_n l_m + \beta_n l_m \sinh \beta_n l_m - \nu \beta_n l_m \sinh \beta_n l_m) + C_n \beta_n^2 (1-\nu) \cosh \beta_n l_m + D_n (2\beta_n \sinh \beta_n l_m + \beta_n l_m \cosh \beta_n l_m - \nu \beta_n l_m \cosh \beta_n l_m) \right\} \sin \beta_n y = -\sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin \beta_n y$$

ここに $l_m = \beta_n a = \frac{\pi n}{\beta} a = \frac{\pi \mu}{\mu} a, \mu = \frac{\delta}{a}$

式(4)を連立に解けば積分定数 $A_n \sim D_n$ が決定され次値となる。

$$\left. \begin{aligned} A_n &= -M_n \frac{a}{2D\beta_n \sinh^2 \beta_n l_m} - M_n \frac{a \cosh \beta_n l_m}{2D\beta_n \sinh^2 \beta_n l_m} - \delta_{mn} \frac{l_m(1-\nu) + 2\cosh \beta_n l_m \sinh \beta_n l_m}{2 \sinh^2 \beta_n l_m} + \delta_{0n} \frac{2 \sinh \beta_n l_m + l_m(1-\nu) \cosh \beta_n l_m}{2 \sinh^2 \beta_n l_m} \\ B_n &= -M_n \frac{1}{2D\beta_n} - \delta_{mn} \frac{\beta_n(1-\nu)}{2}, \quad C_n = \delta_{mn} \\ D_n &= M_n \frac{\cosh \beta_n l_m}{2D\beta_n \sinh \beta_n l_m} + M_n \frac{1}{2D\beta_n \sinh \beta_n l_m} + \delta_{mn} \frac{\beta_n(1-\nu) \cosh \beta_n l_m}{2 \sinh \beta_n l_m} - \delta_{0n} \frac{\beta_n(1-\nu)}{2 \sinh \beta_n l_m} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

次に、無梁板を支える中間支点を $1, 2, \dots, i, j, \dots, r, s$ とし、板に任意垂直荷重 $p(x, y)$ が作用するとき各中間支点に生ずる垂直反力を $V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_r, s$ とする。なお支点反力の符号は上向きを正とするしかるとき、これら $p(x, y)$ および V_j を二重正弦フーリエ級数に展開すれば次のごとくなる。

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad V_j = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{mn}^j \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad i=1, 2, \dots, r, \quad j=1, 2, \dots, s$$

ここに $F_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dy \, dx, \quad F_{mn}^j = \frac{4}{ab} V_j \sin m\pi \alpha_i \sin n\pi \beta_j$
 (α_i, β_j) は点 (i, j) の座標値である。

無梁板に働く任意垂直荷重 $p(x, y)$ の他に各中間支点における反力 V_j をも荷重とみなせば、板に作用する全荷重 $q(x, y)$ はこれら荷重 $p(x, y)$ および V_j の和で表わされ、したがって式(1)の f_{mn} は次の値となる。
 (文献(2)参照)

$$f_{mn} = F_{mn} - \frac{4}{ab} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s V_j \sin m\pi \alpha_i \sin n\pi \beta_j \quad (6)$$

式(6)および式(5)を式(1)に代入すれば、図-1に示す無梁板のたわみ曲面 $w(x, y)$ が次のごとくえらる。

$$\begin{aligned} w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ M_n \left(-\frac{a \sinh \beta_n x}{2D\beta_n \sinh^2 \beta_n l_m} - \frac{x \sinh \beta_n x}{2D\beta_n} + \frac{x \cosh \beta_n l_m \cosh \beta_n x}{2D\beta_n \sinh \beta_n l_m} \right) \right. \\ + M_{0n} \left(-\frac{a \cosh \beta_n \sinh \beta_n x}{2D\beta_n \sinh^2 \beta_n l_m} + \frac{x \cosh \beta_n x}{2D\beta_n \sinh \beta_n l_m} \right) \\ + \delta_{mn} \left(-\frac{l_m(1-\nu) + 2\cosh \beta_n l_m \sinh \beta_n l_m \sinh \beta_n x}{2 \sinh^2 \beta_n l_m} - \frac{x \beta_n(1-\nu) \sinh \beta_n x}{2} + \cosh \beta_n x \right. \\ \left. + \frac{x \beta_n(1-\nu) \cosh \beta_n l_m \cosh \beta_n x}{2 \sinh \beta_n l_m} \right) \\ \left. + \delta_{0n} \left(\frac{2 \sinh \beta_n l_m + l_m(1-\nu) \cosh \beta_n l_m}{2 \sinh^2 \beta_n l_m} \sinh \beta_n x - \frac{x \beta_n(1-\nu) \cosh \beta_n x}{2 \sinh \beta_n l_m} \right) \right\} \sin \beta_n y \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{mn}}{D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)において M_n, M_{0n} および中間支点の支点反力 V_j が明らかになれば、たわみ曲面 $w(x, y)$ の計算でき、したがって本題の無梁板の諸変位および諸断面力が全て求まることとなる。

(2) 基本連立方程式

図-1に示す無梁板において中間支点 (kl) の垂直変位を d^{kl} (下向きを正とする) とすれば、板における同し点 (kl) のたわみ $w(\alpha_k, \beta_l)$ がこの中間支点の垂直変位 d^{kl} と等しくなければならないことより次のとき変形条件式をうる。

$$d^{kl} = w(\alpha_k, \beta_l) \quad k=1, 2, \dots, r, \quad l=1, 2, \dots, s \quad (8)$$

式(8)に式(7)を代入し演算のうえ整理すれば次のとき一連の条件式が求められる。

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s V_j D_{ij}^{kl} + \sum_{n=1}^{\infty} M_n D_{0n}^{kl} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{0n} D_{0n}^{kl} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{nn} D_{nn}^{kl} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{0n} D_{0n}^{kl} = \frac{ab}{4} D^{kl} - \frac{ab}{4} D A^{kl} \quad (9)$$

ここに $k=1, 2, 3, \dots, r, \quad l=1, 2, 3, \dots, s,$

$$D_{ij}^{kl} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi \alpha_i \sin n\pi \beta_j \sin m\pi \alpha_k \sin n\pi \beta_l$$

$$\begin{aligned}
D_{An}^{kl} &= \frac{a\beta}{8} \left(\frac{a \sinh k_0}{\beta_0 \sinh^2 k_0} + \frac{a k_0 \sinh k_0}{\beta_0} - \frac{a k_0 \cosh k_0 \sinh k_0}{\beta_0 \sinh k_0} \right) \sin \pi \beta_0 \\
D_{Bn}^{kl} &= \frac{a\beta}{8} \left(\frac{a \cosh k_0 \sinh k_0}{\beta_0 \sinh k_0} - \frac{a k_0 \cosh k_0}{\beta_0 \sinh k_0} \right) \sin \pi \beta_0 \\
D_{An}^{kl} &= \frac{a\beta D}{8} \left(\frac{k_0(1-\nu) \sinh k_0}{\sinh^2 k_0} + \frac{2 \cosh k_0 \sinh k_0}{\sinh k_0} + k_0 k_0(1-\nu) \sinh k_0 \right. \\
&\quad \left. - 2 \cosh k_0 k_0 - \frac{k_0(1-\nu) k_0 \cosh k_0 \sinh k_0}{\sinh k_0} \right) \sin \pi \beta_0 \\
D_{Bn}^{kl} &= \frac{a\beta D}{8} \left(-\frac{2 \sinh k_0}{\sinh k_0} - \frac{k_0(1-\nu) \cosh k_0 \sinh k_0}{\sinh^2 k_0} + \frac{k_0(1-\nu) k_0 \cosh k_0}{\sinh k_0} \right) \sin \pi \beta_0 \\
D^{kl} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_{kn}}{K_{kn}} \sin \pi \alpha_k \sin \pi \beta_0 \\
K_{kn} &= (\alpha_n^2 + \beta_n^2)^2
\end{aligned}$$

次に、辺ACおよびBDにおけるたわみ角は一般に y のみの関数であるゆえ次のとき正弦フーリエ級数で表わされるものと仮定する。

$$\theta_A(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{An} \sin \beta_n y \quad \theta_B(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{Bn} \sin \beta_n y \quad (10)$$

他方、式(7)の第一次微係数 $\frac{\partial w}{\partial x}$ をとり、辺ACおよびBDの座標値を代入すれば、それぞれの辺におけるたわみ角がえられるゆえ、これらを式(10)と等置し演算のうえ整理すれば次のごとき、 θ_{An}, θ_{Bn} と $V_{An}, M_{An}, S_{An}, \bar{\theta}_{An}$ との関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{ij} D_{ij}^{(n)} + M_{An} \bar{D}_{An} + M_{Bn} \bar{D}_{Bn} + S_{An} \bar{D}_{An} + S_{Bn} \bar{D}_{Bn} &= \bar{D}'_A(n) - \frac{a\beta D}{4} \theta_{An} \\
\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{ij} \bar{D}_{ij}^{(n)} + M_{An} \bar{D}_{An} + M_{Bn} \bar{D}_{Bn} + S_{An} \bar{D}_{An} + S_{Bn} \bar{D}_{Bn} &= \bar{D}'_B(n) - \frac{a\beta D}{4} \theta_{Bn}
\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$n=1, 2, 3, 4, \dots$

ここに

$$\begin{aligned}
D'_{ij}(n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{K_{kn}} \sin \pi \alpha_k \sin \pi \beta_j \\
\bar{D}'_A(n) &= \frac{a\beta}{8 \sinh k_0} \left(\frac{a}{\sinh k_0} - \frac{\cosh k_0}{\beta_0} \right) \\
\bar{D}'_B(n) &= \frac{a\beta}{8 \sinh k_0} \left(\frac{a \cosh k_0}{\sinh k_0} - \frac{1}{\beta_0} \right) \\
\bar{D}_{An} &= \frac{a\beta D_{An}}{8 \sinh k_0} \left(\frac{k_0(1-\nu)}{\sinh k_0} + (1+\nu) \cosh k_0 \right) \\
\bar{D}_{Bn} &= -\frac{a\beta D_{Bn}}{8 \sinh k_0} \left(1+\nu + \frac{k_0(1-\nu) \cosh k_0}{\sinh k_0} \right) \\
\bar{D}'_A(n) &= \frac{a\beta}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_{kn} \alpha_k}{K_{kn}} \\
\bar{D}'_B(n) &= \frac{a\beta}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_{kn} \alpha_k (1-\nu)}{K_{kn}}
\end{aligned}$$

式(9)および式(11)が本題の無梁板を解析するための基本連立方程式であり、これら諸式における未知数のうち V_{kl} と α^{kl} とのいずれか一方が、例えば中間支点の支点沈下がなければ $\alpha^{kl}=0$ 、また中間支点があれば $V_{kl}=0$ 等の条件を含めて他の条件より明らかとなれば、連立方程式の数と未知数の数が一致し、したがって、これら諸式が連立にとけ、本題の無梁板解析が可能となる。

3 計算例

図-2に示すごとく辺AB, BD, CDで単純支持され辺ACが固定される無梁板に等分布荷重 p_0 が満載される場合の計算例を示せば次のとおりである。板周辺および中間支点の沈下がない場合は、

$d''=d^{12}=d^{21}=d^{22}=0$, $\theta_{An}=\theta_{Bn}=0$ であり、
また $\theta_{An}=0$, $M_{An}=0$ であるから式(9)および(11)に示す基本連立方程式は次の内容となる。

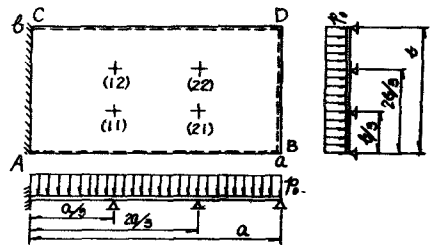
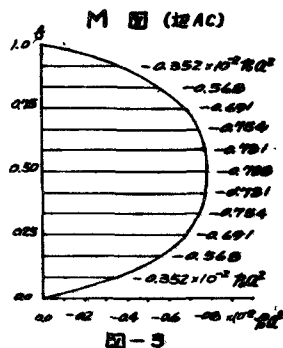


図-2

$$\left. \begin{aligned} V_0 D_0^n + V_2 D_2^n + V_4 D_4^n + V_6 D_6^n + \sum_{m=1}^{\infty} M_{mn} D_m^n &= \frac{0.6}{4} D^n \\ V_0 D_0^n + V_2 D_2^n + V_4 D_4^n + V_6 D_6^n + \sum_{m=1}^{\infty} M_{mn} D_m^n &= \frac{0.6}{4} D^n \\ V_0 D_0^n + V_2 D_2^n + V_4 D_4^n + V_6 D_6^n + \sum_{m=1}^{\infty} M_{mn} D_m^n &= \frac{0.6}{4} D^n \\ V_0 D_0^n + V_2 D_2^n + V_4 D_4^n + V_6 D_6^n + \sum_{m=1}^{\infty} M_{mn} D_m^n &= \frac{0.6}{4} D^n \\ V_0 D_0^n + V_2 D_2^n + V_4 D_4^n + V_6 D_6^n + M_{nn} D_m^n &= D_1^n(m) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$n=1, 2, 3, \dots$

式(12)は未知数 M_{mn} の単独項と級数和の項で示されるため一種の試算による収束計算となる。いま辺長比 $\mu = \frac{b}{a} = 0.5$ に対して上記基本連立方程式より未知反力 V_0, V_2, V_4, V_6 , および M_{mn} を求めれば式(10)および表-1に示す諸数値をうる。



$$V_0 = V_2 = 0.06389 \text{ kg/m}^2, \quad V_4 = V_6 = 0.06395 \text{ kg/m}^2 \quad (13)$$

n	M_{nn}	n	M_{nn}	n	M_{nn}	n	M_{nn}
1	-0.00888	5	-0.00026	9	-0.00004	13	-0.00001
2	0.0	6	0.0	10	0.0	14	0.0
3	-0.00119	7	-0.00009	11	-0.00002	15	-0.00001
4	0.0	8	0.0	12	0.0	16	0.0

表-1

表-1の諸値を式(3)に代入して、辺ACにおける端モーメントを算出すれば図-3に示すときM図をうる。

4 結論

本研究は中間支点において点支持される場合を取り扱ったが、同様の手法により中間支柱の反力モーメントを考慮して柱と板とが剛結する無梁板の解法も可能であり、これについては後日発表の予定である。

本研究には文部省科学研究費の補助をうけた。記して謝意を表する。

文献 (1) 山崎、柳木：フーリエ級数による連続はりおよびラーメンの解法 九州大学工學集報 第39巻第3号

昭和41年10月

(2) 山崎、柳木：周辺で単純支持される無梁板の解法 土木学会論文集 第136号 昭和41年12月

(3) 例えば K. Grein: *Piltzdecken Theorie und Berechnung*, Berlin 1948,

Wilhelm Ernst & Sohn

Lewe: *Piltzdecken und andere tragerlose Eisenbetonplatten*,

2 auf. Berlin 1926, Wilhelm Ernst & Sohn