

一対辺が点支持され他対辺が単純支持される矩形板の解法

九州大学 正員 山崎徳也
 “ 正員 樗木武
 “ 学生員 〇山田喜四夫

1 緒言

板周辺において板と柱とが直交して直結する構造物は、土木、建築の各分野でわれわれの多く目にするところであるが、これら構造物に対しての理論的研究はいまだみあてられない。

本研究は一対辺が単純支持され、他対辺が任意の間隔を有する柱に支持される矩形板に、任意変直荷重が作用する場合の厳密理論解法を提示し、かかる構造物の解析および設計に資せんとするものである。

2 解法

一般に板と直交して直結する柱には柱から垂直反力、水平反力、曲げモーメントおよび捩りモーメントが伝えられるが、本研究では垂直反力のみが伝えられる場合について述べることにする。

(1) 板の弾性曲面

図-1に示すごとく AB 辺に沿って x 軸、 AC 辺に沿って y 軸、紙面に直交して z 軸をもつ直交座標系 (x, y, z) を導入する。板 $ABCD$ は辺 AB 、 CD で単純支持され、また辺 AC が r 個の中間支点 ($i=1, 2, \dots, r$) で、辺 BD が s 個の中間支点 ($j=1, 2, \dots, s$) で点支持されるものとする。しかるとき、辺 AB 、 CD の境界条件は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ で } (W)_{y=0} &= 0, \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0 \\ y=b \text{ で } (W)_{y=b} &= 0, \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

さらに

D : 板剛度 $[Eh^3/12(1-\nu^2)]$ h : 板の厚さ

E : 板の弾性係数 ν : 板のポアソン比

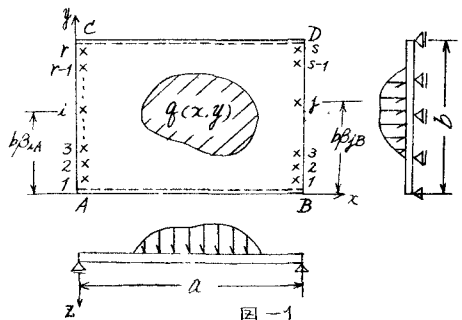
板に任意変直荷重 $q(x, y)$ が作用し、かつ式 (1) の境界条件と満足するとき板の弾性曲面 W は次式であらわれる。

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \{ (A_n + B_n x) \sinh \beta_n x + (C_n + D_n x) \cosh \beta_n x \} \sin \beta_n y + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{mn}}{D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (2)$$

ここで

$$A_n, B_n, C_n, D_n \text{ は積分定数, } \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}, \quad G_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y dx dy$$

積分定数 $A_n \sim D_n$ は $x=0, a$ における辺 AC 、 BD の境界条件を満足するように決定すればよい。すなわち、板から柱に伝えられる反力を正弦フーリエ級数にあらわしうるものと仮定すれば、境界条件式は次のようになる。



$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ 区} \quad M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=0} = 0, \quad V_x = -D \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y^2} \right\}_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} V_{An} \sin \beta_n y \\ x=a \text{ 区} \quad M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0, \quad V_x = -D \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y^2} \right\}_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} V_{Bn} \sin \beta_n y \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

但し V_{An}, V_{Bn} は任意定数

他方、辺 AC の各中間点の座標値をそれぞれ $(0, b\beta_{1A}), (0, b\beta_{2A}), \dots, (0, b\beta_{iA}), \dots, (0, b\beta_{nA})$ とし、各中間点に生ずる垂直反力を $R_1^A, R_2^A, \dots, R_i^A, \dots, R_n^A$ とすると、これらを $0 \leq y \leq b$ の変域にて正弦フーリエ級数に展開すれば次式の如くなる。

$$R_1^A = \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \sin \beta_n y, R_2^A = \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \sin \beta_n y, \dots, R_i^A = \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \sin \beta_n y, \dots, R_n^A = \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \sin \beta_n y \quad (4)$$

$$\text{但し } R_n^A = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{2}{b} \int_{b\beta_{n-1}^A}^{b\beta_n^A} \frac{R_1^A}{2\Delta} \sin \beta_n y dy = \frac{2}{b} R_1^A \sin \pi \beta_n, R_n^A = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{2}{b} \int_{b\beta_{n-1}^A}^{b\beta_n^A} \frac{R_2^A}{2\Delta} \sin \beta_n y dy = \frac{2}{b} R_2^A \sin \pi \beta_n,$$

$$\dots, R_n^A = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{2}{b} \int_{b\beta_{n-1}^A}^{b\beta_n^A} \frac{R_i^A}{2\Delta} \sin \beta_n y dy = \frac{2}{b} R_i^A \sin \pi \beta_n, \dots, R_n^A = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{2}{b} \int_{b\beta_{n-1}^A}^{b\beta_n^A} \frac{R_n^A}{2\Delta} \sin \beta_n y dy = \frac{2}{b} R_n^A \sin \pi \beta_n.$$

辺 AC の全反力 V_A は、上記各中間点の垂直反力の総和と与えられるから式(3)の任意定数 V_{An} として次をうる。

$$V_{An} = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} R_i^A \sin \pi \beta_{iA} \quad (5)$$

同様に辺 BD における各中間点の反力をそれぞれ $R_1^B, R_2^B, \dots, R_i^B, \dots, R_n^B$ とすれば、式(3)の任意定数 V_{Bn} は次の如く与えられる。

$$V_{Bn} = \frac{2}{b} \sum_{i=1}^n R_i^B \sin \pi \beta_{iB} \quad (6)$$

次に式(2)を式(3)に代入すれば次の如き連立方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{\beta_n} B_n + (1-\nu) C_n &= 0 \\ (1-\nu) \sinh \beta_n \cdot A_n + \left\{ a(1-\nu) \sinh \beta_n + \frac{2}{\beta_n} \cosh \beta_n \right\} B_n + (1-\nu) \cosh \beta_n \cdot C_n + \left\{ a(1-\nu) \cosh \beta_n + \frac{2}{\beta_n} \sinh \beta_n \right\} D_n &= 0 \\ (1-\nu) \beta_n^2 A_n - (1-\nu) \beta_n^2 D_n + \sum_{m=1}^{\infty} K_{mn} - \frac{V_{An}}{D} &= 0 \\ (1-\nu) \beta_n^2 \cosh \beta_n A_n + \left\{ a(1-\nu) \beta_n^2 \cosh \beta_n - (1-\nu) \beta_n^2 \sinh \beta_n \right\} B_n + (1-\nu) \beta_n^2 \sinh \beta_n C_n \\ + \left\{ a(1-\nu) \beta_n^2 \sinh \beta_n - (1-\nu) \beta_n^2 \cosh \beta_n \right\} D_n + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m K_{mn} - \frac{V_{Bn}}{D} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

但し $K_{mn} = \frac{[\alpha m^2 + (2-\nu) \beta_n^2] \alpha m}{(\alpha m^2 + \beta_n^2)^2 D} \cdot G_{mn}$

式(7)と連立に解けば、 $A_n \sim D_n$ が求まり次式の通りとなる。

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{S_n} \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} K_{mn} - \frac{V_{An}}{D} \right) E_0 + \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m K_{mn} - \frac{V_{Bn}}{D} \right\} F_0 \right], \quad B_n = \frac{1}{S_n} \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} K_{mn} - \frac{V_{An}}{D} \right) G_0 + \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m K_{mn} - \frac{V_{Bn}}{D} \right\} H_0 \right] \\ C_n &= \frac{1}{S_n} \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} K_{mn} - \frac{V_{An}}{D} \right) I_0 + \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m K_{mn} - \frac{V_{Bn}}{D} \right\} J_0 \right], \quad D_n = \frac{1}{S_n} \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} K_{mn} - \frac{V_{An}}{D} \right) K_0 + \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m K_{mn} - \frac{V_{Bn}}{D} \right\} L_0 \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\text{但し } \beta_n = \frac{n\pi a}{b}, \quad S_n = (3+\nu)^2 \sinh^2 \beta_n - (1-\nu)^2 \beta_n^2$$

$$E_0 = -\frac{2(3+\nu)}{(1-\nu)\beta_n^2} \sinh^2 \beta_n + \frac{a^2(1-\nu)}{\beta_n}, \quad F_0 = -\frac{a(1+\nu)}{\beta_n^2} \sinh \beta_n, \quad G_0 = -\frac{3+\nu}{\beta_n^2} \sinh \beta_n \cosh \beta_n - \frac{a(1-\nu)}{\beta_n},$$

$$H_0 = \frac{3+\nu}{\beta_n^2} \sinh \beta_n + \frac{a(1-\nu)}{\beta_n} \cosh \beta_n, \quad I_0 = \frac{2(3+\nu)}{(1-\nu)\beta_n^2} \sinh \beta_n \cosh \beta_n + \frac{2a}{\beta_n^2},$$

$$J_0 = -\frac{2(3+\nu)}{(1-\nu)\beta_n^2} \sinh \beta_n - \frac{2a}{\beta_n^2} \cosh \beta_n, \quad K_0 = \frac{3+\nu}{\beta_n^2} \sinh^2 \beta_n, \quad L_0 = -\frac{a(1-\nu)}{\beta_n} \sinh \beta_n$$

式(8)を式(2)に代入すれば図-1に示す弾性曲面 W の次の如く与えられる。

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} K_{mn} - \frac{V_{An}}{D} \right) \bar{P}_n + \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m K_{mn} - \frac{V_{Bn}}{D} \right\} \bar{Q}_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{mn}}{D(\alpha m^2 + \beta_n^2)} \sin \alpha m x \right] \sin \beta_n y \quad (9)$$

ただし

$$\bar{P}_n = \frac{1}{S_0} \{ \sinh \beta_n X (E_0 + X G_0) + \cosh \beta_n X (I_0 + X K_0) \}$$

$$\bar{Q}_n = \frac{1}{S_0} \{ \sinh \beta_n X (F_0 + X H_0) + \cosh \beta_n X (J_0 + X L_0) \}$$

(2) 基本連立方程式の誘導

辺 AC, BD の各中間支点がそれぞれ $d_{1A}, d_{2A}, \dots, d_{rA}, \dots, d_{rA}$ および $d_{1B}, d_{2B}, \dots, d_{sB}, \dots, d_{sB}$ なる垂直変位 (Z 軸の正の向きを正とする) を起こしたものとす。しかるとき板の弾性曲面 W は各中間支点においてこれら中間支点の垂直変位に等しくなければならぬ。すなわち

$$\left. \begin{aligned} (W)_{x=0}^{y=b_{1A}} = d_{1A}, (W)_{x=0}^{y=b_{2A}} = d_{2A}, \dots, (W)_{x=0}^{y=b_{rA}} = d_{rA}, \dots, (W)_{x=0}^{y=b_{rA}} = d_{rA} \\ (W)_{x=a}^{y=b_{1B}} = d_{1B}, (W)_{x=a}^{y=b_{2B}} = d_{2B}, \dots, (W)_{x=a}^{y=b_{sB}} = d_{sB}, \dots, (W)_{x=a}^{y=b_{sB}} = d_{sB} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式(10)に式(9)を代入し、かつ V_{rA}, V_{sB} として式(5), (6)を用い演算のうえ整理すれば、矩形板を支える各中間支点反力を求めるための基本連立方程式が次のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{P}_n^0 \sin n\pi \beta_{1A} \sin m\pi \beta_{rA} \right\} R_{1A} + \sum_{j=1}^s \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n^0 \sin n\pi \beta_{jB} \sin n\pi \beta_{rA} \right\} R_{jB} \\ = \frac{Db}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{ \bar{P}_n^0 + (-1)^m \bar{Q}_n^0 \} K_{mn} \sin n\pi \beta_{rA} - d_{rA} \right] \quad (k=1, 2, \dots, r) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{P}_n^0 \sin n\pi \beta_{1A} \sin m\pi \beta_{sB} \right\} R_{1A} + \sum_{j=1}^s \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n^0 \sin n\pi \beta_{jB} \sin n\pi \beta_{sB} \right\} R_{jB} \\ = \frac{Db}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{ \bar{P}_n^0 + (-1)^m \bar{Q}_n^0 \} K_{mn} \sin n\pi \beta_{sB} - d_{sB} \right] \quad (l=1, 2, \dots, s) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ただし $\bar{P}_n^0 = (\bar{P}_n)_{x=0} = \frac{2(3+\nu)}{(1-\nu)^2 \beta_n^3} \sinh \beta_n \cosh \beta_n + \frac{2}{\beta_n^2}$, $\bar{Q}_n^0 = (\bar{Q}_n)_{x=a} = -\bar{P}_n^0$

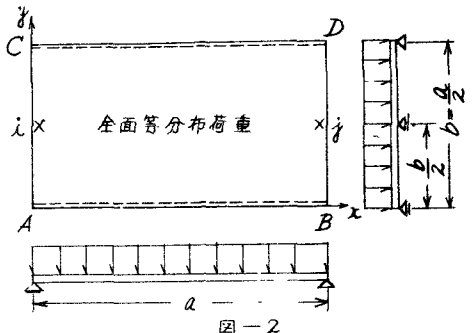
$\bar{Q}_n^0 = (\bar{Q}_n)_{x=0} = -\frac{2(3+\nu)}{(1-\nu)^2 \beta_n^3} \sinh \beta_n - \frac{2}{\beta_n^2} \cosh \beta_n$, $\bar{P}_n^0 = (\bar{P}_n)_{x=a} = -\bar{Q}_n^0$

式(11)は支点反力と同数の連立方程式となるゆえ、これらと連立に解けば未知不静定反力 $R_1^A, R_2^A, \dots, R_r^A, \dots, R_r^A, R_1^B, R_2^B, \dots, R_s^B, \dots, R_s^B$ が求まることとなり、その結果を式(5), (6)に代入し、さらに式(2)に代入すれば、板の弾性曲面 W がえられることとなる。

3 計算例

図-2に示すごとく辺 AB, CD で固定を持ち、かつ辺 AC, BD の二等分点で中間支持された矩形板に荷重強度 p_0 の均分布荷重が満載される場合の計算例を示せば次のとおりである。

すなわち中間支点の支点変位がないものとすれば、 $d_{1A} = d_{1B} = 0$ であり、また本例では板の辺長比を $\frac{b}{a} = 0.5$ とすれば式(11)に示す基本連立方程式は次の内容となる。



$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_n^0 \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} R_{1A} + \sum_{j=1}^s \bar{Q}_n^0 \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} R_{jB} = \frac{b}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{P}_n^0 - \bar{Q}_n^0) K_{mn} \sin \frac{n\pi}{2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_n^0 \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} R_{1A} + \sum_{j=1}^s \bar{Q}_n^0 \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} R_{jB} = -\frac{b}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{P}_n^0 - \bar{Q}_n^0) K_{mn} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$Z > 1: K'_{mn} = \frac{(\alpha_n^2 + (2-12)\beta_n^2)\alpha_n}{(\alpha_n^2 + \beta_n^2)^2} G_{mn}, \quad G_{mn} = \frac{16P_0}{m\pi\pi} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \sin^2 \frac{m\pi}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_n^0 \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n^0 \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} = 0.3671 \times 10^{-2} a^3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n^0 \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_n^0 \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} = -0.3041 \times 10^{-4} a^3$$

$$\frac{b}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{P}_n^0 - \bar{Q}_n^0) K'_{mn} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{b}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{P}_n^0 - \bar{Q}_n^0) K_{mn} \sin \frac{n\pi}{2} = 0.2358 a^3 p_0$$

式(12)を連立に解けば各中間支点反力 R_{1A}, R_{1B} が次のごとくえられる。

$$R_{1A} = -R_{1B} = 0.06371 a^3 p_0 \quad (13)$$

式(13)を式(5), (6)に代入してえられる結果を式(9)に代入すれば板の弾性曲面がえられることとなり、 x および y の各値について計算すれば図-3に示す結果となる。なお図-3は中間支点がない場合、すなわち一対辺が単純支持され、他対辺が自由である矩形板に等分布荷重が満載された場合の板の弾性曲面を併記して比較対照した。

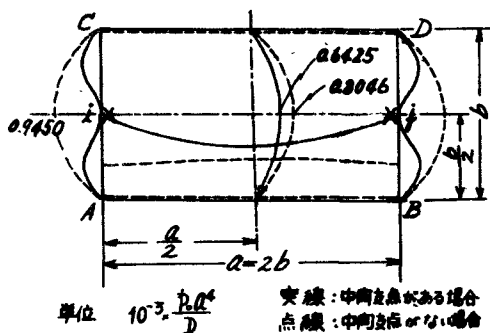


図-3

4 結 語

本法によれば板を支える各中間支点の不安定反力は式(11)の多元連立方程式を解くのみで簡単に求めることができ、さらに式(11)の係数および荷重値をあらかじめ計算のうえ因表化しておけば、本題の構造物を解くことは連梁はりやラーメン等の骨組構造を解くのとほとんど変りない労力で済むこととなり極めて実用的である。

また、本法と同様の手法により柱の反力モーメントを考慮した場合の解析ならびに直交異方柱板が周辺で柱にて支持される場合の解析、さらに拡張して反力および板の諸変位・諸断面力の影響面解析も可能であり、これらについては逐次発表の予定である。