

弾性支持ばりをもつ矩形板の解法

(一対辺が連続ばりにて弾性支持され他対辺が単純支持される場合)

九州大学 正員 山崎徳也

九州大学 正員 樽木 武

九州大学 学生員 金子忠男

1 緒言 弾性ばりにて支持される矩形板の解法に関する研究は、藤井⁽¹⁾、坪井⁽²⁾、東⁽³⁾、岡元⁽⁴⁾、成岡氏等の多くの人々により行なわれてきた。しかし、これら既往の研究はいずれも板を支持する弾性ばりが板一径間に対し一径間ばりで構成される場合に限定され、連続ばりやラーメン等により構成される場合の解法を提示した論文は未だ見当らない。本研究は連続ばりおよびラーメンで構成される弾性ばりにて支持される矩形板の厳密理論解法の第一報として、一対辺が連続ばりにて弾性支持され、他対辺が単純支持される矩形板の解法を提示せんとするものである。なお、本研究では次のごとき仮定を行った。すなわち、(1)板は等方性等断面とする。(2)弾性ばりと板は等しいたわみを起こし、弾性ばりと板との間に隙間が生ずることはないものとする。また、両者が隅部で浮かび上がらぬように支持されているものとする。(3)弾性ばりは捩れ変形を起こさず、曲げ変形のみを生ずる。(4)弾性ばりの曲げ剛性はその全長にわたって一定であるものとする。

2 解法

(1)板のたわみ曲面 図-1に示す矩形板において、辺ABに沿ってx軸、ACに沿ってy軸、紙面に直交してz軸をもつ直交座系(x, y, z)を導入し、板に作用する任意垂直荷重を $q(x, y)$ 、また板のx軸方向のたわみを w とすれば、板の基礎微分方程式は周知のごとく次式で与えられる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (1)$$

ここに

$D = \frac{E_p h_p^3}{12(1-\mu^2)}$: 板剛度 h_p : 板の厚さ

E_p : 板の弾性係数

μ : 板のポアソン比

式(1)の一般解 w は文献(6)の式(7)に示すごとく、次式で表わされる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sinh \alpha_m y + B_m y \sinh \alpha_m y + C_m \cosh \alpha_m y + D_m y \cosh \alpha_m y) \sin \alpha_m x + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh \beta_n x + B_n x \sinh \beta_n x + C_n \cosh \beta_n x + D_n x \cosh \beta_n x) \sin \beta_n y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (2)$$

$$\text{ここに } \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}, \quad G_{mn} = \frac{f_{mn}}{D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}, \quad f_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dy \, dx$$

$A_m \sim D_m, A_n \sim D_n$ は積分定数

さて、図-1に示すように矩形板ABCDが辺AB, CDで単純支持され、かつ辺AC, BDで連続ばりにて構成される弾性ばりで支持されるものとする。(かかるとき辺AB, CDの境界条件は次のごとなる。

$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ 及 } y=b \text{ で } w=0, \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0 \text{ 及 } y=b} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

また、辺AC, BDではx方向の端モーメントが0であること、および弾性ばりのたわみ曲線を $\phi(x)$

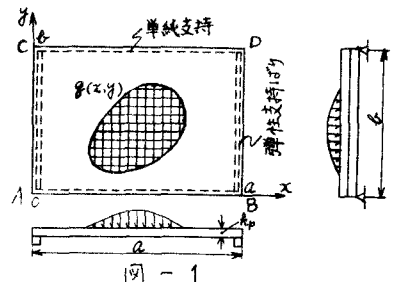


図-1

$\delta_0(y)$ とすれば、板のたわみ w がこれら $\delta_A(y)$, $\delta_B(y)$ と等しくなければならぬことより、次の境界条件式をうる。

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ で } w &= \delta_A(y), & M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} = 0 \\ x=a \text{ で } w &= \delta_B(y), & M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、弾性ばりのたわみ曲線 $\delta_A(y)$, $\delta_B(y)$ を正弦フーリエ級数で表わしうるものとし、次のごとく仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \delta_A(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{An} \sin \beta_n y \\ \delta_B(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{Bn} \sin \beta_n y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(5)を式(4)に代入して得られる諸式と式(3)の境界条件とに式(2)を代入し、積分定数 $A_m \sim D_m$, $A_n \sim D_n$ を求めれば次の結果をうる。

$$\left. \begin{aligned} A_m &= B_m = C_m = D_m = 0, & A_n &= -\frac{1}{\sinh \beta_n} \left\{ \cosh \beta_n + \frac{(1-\nu) \beta_n}{2 \sinh \beta_n} \right\} \delta_{An} + \frac{1}{\sinh \beta_n} \left\{ 1 + \frac{(1-\nu) \beta_n \cosh \beta_n}{2 \sinh \beta_n} \right\} \delta_{Bn}, \\ B_n &= -\frac{(1-\nu) \beta_n}{2} \delta_{An}, & C_n &= \delta_{An}, & D_n &= \frac{(1-\nu) \beta_n}{2 \sinh \beta_n} (\delta_{An} \cosh \beta_n - \delta_{Bn}), \quad n=1, 2, \dots, \beta_n = \frac{n\pi a}{L} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)における δ_{An} , δ_{Bn} は板からはりに伝えられる辺AC, およびBDの反力 $V_A(y) (= (V_x)_{x=0})$ および $V_B(y) (= (V_x)_{x=a})$ を荷重として受ける場合の弾性ばりのたわみ曲線が式(5)の $\delta_A(y)$, $\delta_B(y)$ にそれぞれ等しい条件より次のごとく求められる。まず反力 V_x とたわみ w との関係は次式で表わされる。

$$V_x = -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\}_{x=0, a} \quad (7)$$

式(6)を式(2)に代入して得られる結果を式(7)に代入して、辺ACおよびBDの反力 $V_A(y)$, $V_B(y)$ を求めれば次式のごとく得られる。

$$\left. \begin{aligned} V_A(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} V_{An} \sin \beta_n y \\ V_B(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} V_{Bn} \sin \beta_n y \end{aligned} \right\} \quad (8) \quad \text{ここに} \quad \left. \begin{aligned} V_{An} &= D \left[-\tilde{h}(\beta_n) \delta_{An} + \tilde{h}(\beta_n) \delta_{Bn} + \sum_{m=1}^{\infty} \{ A_m^2 + (2-\nu) \beta_m^2 \} A_m G_{mn} \right] \\ V_{Bn} &= -D \left[-\tilde{h}(\beta_n) \delta_{An} + \tilde{h}(\beta_n) \delta_{Bn} + \sum_{m=1}^{\infty} \{ A_m^2 + (2-\nu) \beta_m^2 \} A_m G_{mn} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\tilde{h}(\beta_n) = \{ (1-\nu) \beta_n + (3+\nu) \sinh \beta_n \cosh \beta_n \} (1-\nu) \beta_n^2 / (2 \sinh^2 \beta_n)$$

$$\tilde{h}(\beta_n) = \{ (1-\nu) \beta_n \cosh \beta_n + (3+\nu) \sinh \beta_n \} (1-\nu) \beta_n^2 / (2 \sinh^2 \beta_n)$$

ところで、図-2に示すごとく任意重直荷重 $p(y)$ が作用する場合の連続ばりのたわみ曲線は、フーリエ級数を用いて次のごとく表わし得る。(文献(7)の式(10)参照)

$$\delta(y) = \frac{L^4}{EI \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} H_n^A \sin \frac{n\pi}{L} y \quad (10)$$

$$\text{ここに} \quad H_n = \frac{2}{L} \int_0^L p(y) \sin \frac{n\pi}{L} y a - \frac{2}{L} \sum_{i=1}^s R_i \sin n\pi \varepsilon_i, \quad R_i \text{は中間支点} i \text{の支点反力}$$

一般に辺ACにおける弾性ばりが中間支点 γ 個

($i=1, 2, \dots, \gamma$) に支えられるものとし、辺BDにおける弾性ばりが中間支点 s 個($j=1, 2, \dots, s$)に支えられるものとする。(かかるとき、式(10)における荷重 $p(y)$ として式(8)に示す板からはりに伝えられる荷重 $V_A(y)$, $V_B(y)$ を用いれば辺AC, BDにおける各連続ばりのたわみ曲線 $\delta_A(y)$, $\delta_B(y)$ が結局次のごとく求められる。

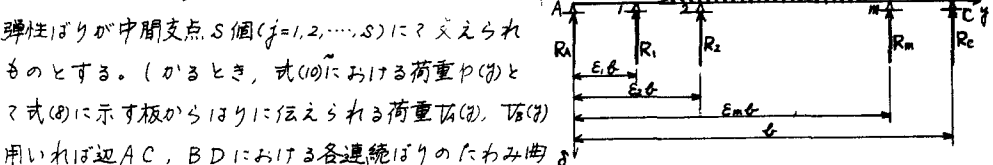


図-2

$$\left. \begin{aligned} \delta_A(y) &= \frac{L^4}{EI \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} H_n^A \sin \beta_n y \\ \delta_B(y) &= \frac{L^4}{EI \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} H_n^B \sin \beta_n y \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

E^A, E^B : 辺AC, BDにおける弾性ばりの弾性係数

I^A, I^B : 辺AC, BDにおける弾性ばりの断面二次モーメント

式(11)を式(5)に代入すれば δ_{An} , δ_{Bn} が求まり次式となる。

$$\delta_{An} = \frac{L^4}{EI^A \pi^4} \frac{H_n^A}{n^4}, \quad \delta_{Bn} = \frac{L^4}{EI^B \pi^4} \frac{H_n^B}{n^4} \quad (12)$$

式(12)において $V_{An}, V_{Bn}, R_k^A, R_k^B$ が与えられれば式(12)を式(6)に代入することにより積分定数 $A_n \sim D_n$ が求まるとなる。

(2) 基本連立方程式の誘導

辺 AC, BD における連続ばりの中間支点反力を求めるための基本連立方程式は文献(7)の式(17)より次のごとく得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^r R_k^A D_{kj}^A &= \frac{c}{2} D_k^A + F_A d_k^A & (\text{ただし } k=1, 2, \dots, r) \\ \sum_{j=1}^s R_k^B D_{kj}^B &= \frac{c}{2} D_k^B + F_B d_k^B & (\text{ただし } k=1, 2, \dots, s) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここに d_k^A, d_k^B : 辺 AC, BD における連続ばりの中間支点 k の垂直変位量

$$\begin{aligned} D_{kj}^A &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin n\pi E_k^A \sin n\pi E_j^A, & D_{kj}^B &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin n\pi E_k^B \sin n\pi E_j^B, & D_k^A &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} V_{An} \sin n\pi E_k^A \\ D_k^B &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} V_{Bn} \sin n\pi E_k^B, & F_A &= E_b I_b^A \pi^4 / (2l^3), & F_B &= E_b I_b^B \pi^4 / (2l^3) \end{aligned}$$

いま、板剛度とはりの曲げ剛度との比をとり、 $E_b D / E_b I_b^A = k_A$ 、 $E_b D / E_b I_b^B = k_B$ とし、これらを用いて式(13)を書き換えると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{An} &= \frac{c^3}{n^4 \pi^4 D} k_A (V_{An} - \sum_{j=1}^r R_j^A \sin n\pi E_j^A) \\ \delta_{Bn} &= \frac{c^3}{n^4 \pi^4 D} k_B (V_{Bn} - \sum_{j=1}^s R_j^B \sin n\pi E_j^B) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式(14)を式(9)に代入して V_{An}, V_{Bn} を求め、これらを式(13)に代入し演算の上整理すれば、矩形板を支える連続ばりの各中間支点反力を求めるための基本連立方程式が次のごとく得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^r (D_{kj}^A - \bar{P}_{kj}^A) R_j^A + \sum_{j=1}^s \bar{P}_{kj}^B R_j^B &= \frac{c}{2} P_k^A + F_A d_k^A & (\text{ただし } k=1, 2, \dots, r) \\ \sum_{j=1}^r \bar{P}_{kj}^A R_j^A + \sum_{j=1}^s (D_{kj}^B + \bar{P}_{kj}^B) R_j^B &= -\frac{c}{2} P_k^B + F_B d_k^B & (\text{ただし } k=1, 2, \dots, s) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに} \quad \bar{P}_{kj}^A &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{K}{H} \sin n\pi E_k^A \sin n\pi E_j^A, & \bar{P}_{kj}^B &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{c^3 \bar{H}(\bar{\alpha}_n)}{\pi^4 D^2 H} k_B \sin n\pi E_k^B \sin n\pi E_j^B \\ \bar{P}_{kj}^B &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{c^3 \bar{H}(\bar{\alpha}_n)}{\pi^4 D^2 H} k_A \sin n\pi E_k^B \sin n\pi E_j^A, & \bar{P}_{kj}^A &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{K}{H} \sin n\pi E_k^B \sin n\pi E_j^A \\ P_k^A &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{1}{DH} \left\{ 1 + \frac{c^3 \bar{H}(\bar{\alpha}_n)}{n^4 \pi^4} k_B - (-1)^m \frac{c^3 \bar{H}(\bar{\alpha}_n)}{n^4 \pi^4} k_B \right\} \{ \alpha_m^2 + (2-\nu) \beta_n^2 \} \alpha_m G_{mn} \sin n\pi E_k^A \\ P_k^B &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{1}{DH} \left\{ (-1)^m + (-1)^m \frac{c^3 \bar{H}(\bar{\alpha}_n)}{n^4 \pi^4} k_A - \frac{c^3 \bar{H}(\bar{\alpha}_n)}{n^4 \pi^4} k_A \right\} \{ \alpha_m^2 + (2-\nu) \beta_n^2 \} \alpha_m G_{mn} \sin n\pi E_k^B \\ H(\bar{h}, \bar{\alpha}) &= \frac{1}{D^2} \left\{ 1 + \frac{c^3 \bar{H}(\bar{\alpha})}{n^4 \pi^4} k_A + \frac{c^3 \bar{H}(\bar{\alpha})}{n^4 \pi^4} k_B + \frac{c^6 \bar{H}^2(\bar{\alpha})}{n^8 \pi^8} k_A k_B - \frac{c^6 \bar{H}^2(\bar{\alpha})}{n^8 \pi^8} k_A k_B \right\} \\ K(\bar{h}, \bar{\alpha}) &= \frac{c^3 k_B}{n^4 \pi^4} \frac{1}{D^2} \left\{ \bar{h}(\bar{\alpha}) + \frac{c^3 \bar{H}^2(\bar{\alpha})}{n^4 \pi^4} k_A - \frac{c^3 \bar{H}^2(\bar{\alpha})}{n^4 \pi^4} k_A \right\} \end{aligned}$$

式(15)は支点反力と同数の連立方程式となるゆえ、これらを連立に解けば未知不静定反力 R_k^A, R_k^B が求まり、その結果を式(12)に代入して得られる諸式と式(9)とを連立に解けば δ_{An}, δ_{Bn} が求まるとなり、弾性ばりの諸変位および諸断面力が確定することとなる。また得られた δ_{An}, δ_{Bn} を式(6)に代入すれば積分定数 $A_n \sim D_n$ が算出され、したがって式(2)のたわみ w および矩形板の諸変位および諸断面力がすべて解明されることとなる。

3 計算例

いま、図-3に示すごとく辺 AB, CD が単純支持され、辺 AC, BD が同じく三径間連続ばりに弾性支持される矩形板 $ABCD$ に、荷重強度 q の垂直等分布荷重を満載するものとする。かかるとき、辺 AC, BD の中間支点沈下がないものとするれば、 $d_1^A = d_2^A = d_1^B = d_2^B = 0$ となり、式(15)に示す基本連立方程式は次式の内容となる。

$$\left. \begin{aligned} (D_{11}^A - \bar{P}_{11}^A) R_1^A + (D_{12}^A - \bar{P}_{12}^A) R_2^A + \bar{P}_{11}^B R_1^B + \bar{P}_{12}^B R_2^B &= \frac{c}{2} P_1^A, & (D_{11}^A - \bar{P}_{11}^A) R_1^A + (D_{12}^A - \bar{P}_{12}^A) R_2^A + \bar{P}_{11}^B R_1^B + \bar{P}_{12}^B R_2^B &= \frac{c}{2} P_2^A \\ \bar{P}_{21}^A R_1^A + \bar{P}_{22}^A R_2^A + (D_{11}^B + \bar{P}_{11}^B) R_1^B + (D_{12}^B + \bar{P}_{12}^B) R_2^B &= -\frac{c}{2} P_1^B, & \bar{P}_{21}^A R_1^A + \bar{P}_{22}^A R_2^A + (D_{11}^B + \bar{P}_{11}^B) R_1^B + (D_{12}^B + \bar{P}_{12}^B) R_2^B &= -\frac{c}{2} P_2^B \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

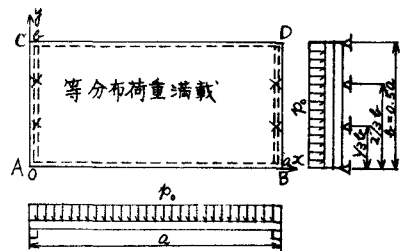


図 - 3

数値計算として板の辺長比を $\mu(=b/a)=0.5$ とし、弾性ばりが図-4に示すとき断面を有するものとすれば、式(4)の諸係数および荷重項は次の諸値となる。

$$\begin{aligned} k_1=k_2=14.06593, \quad D_1^1=0.80171, \quad D_2^1=D_1^2=0.70151, \quad D_2^2=0.80171, \\ P_{11}^1=0.66480, \quad P_{12}^1=P_{21}^1=0.59368, \quad P_{22}^1=0.66480, \quad P_{11}^2=0.88754 \times 10^{-3}, \\ P_{12}^2=P_{21}^2=0.88754 \times 10^{-3}, \quad P_{22}^2=0.88754 \times 10^{-3}, \quad P_1^1=0.038232 p_0 a, \quad P_2^1=0.038232 p_0 a, \\ D_{11}^1=0.80171, \quad D_{12}^1=D_{21}^1=0.70151, \quad D_{22}^1=0.80171, \quad P_{11}^2=0.88754 \times 10^{-3}, \\ P_{12}^2=P_{21}^2=0.88754 \times 10^{-3}, \quad P_{22}^2=0.88754 \times 10^{-3}, \quad P_{11}^2=-0.66480, \quad P_{12}^2=P_{21}^2=-0.59368, \\ P_{22}^2=-0.66480, \quad P_1^2=-0.038232 p_0 a, \quad P_2^2=-0.038232 p_0 a, \end{aligned}$$

上記の諸値を式(6)に代入して連立に解けば、次のごとく不静定反力 $R_1^1, R_2^1, R_1^2, R_2^2$ が求まる。

$$R_1^1=R_2^1=0.038770 p_0 a^2, \quad R_1^2=R_2^2=0.038770 p_0 a^2,$$

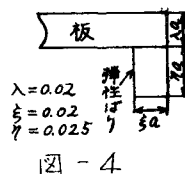
4. 結論

本研究は連続ばりにて弾性支持される矩形板の解法を述べ、現在いまだ解析されていない構造物の解法を明らかにした点で意義があるが、さらに本法の特色として次のごとく諸点が列記される。

(1) 矩形板を支える弾性ばりの中間支点反力を求めることは、単に式(4)の多元連立一次方程式を解くだけの簡単な内容となる。(2) 本法はいわゆる応力法に属し、中間支点反力が直接基本連立方程式から算出される。(3) 本法は弾性ばりの中間支点の沈下問題にも適用できる。(4) 本法の拡張応用により各不静定反力および板の諸変位、諸断面力の影響面を求めることができる。

本研究では一対辺が連続ばりで弾性支持され、他対辺が単純支持される矩形板の解析のみに留ったが、本研究と同様な手法により一対辺がラーメン部材にて弾性支持され、他対辺が単純支持される矩形板の解析、また板の周辺が連続ばりあるいはラーメンにて構成される弾性ばりで支持される矩形板および連続板の解析が可能であり、これらについては逐次発表の予定である。

なお、本研究には文部省科学研究費の補助をうけた、記して謝意を表する。



文献 (1) 藤井忠二：矩形平板と梁 昭和19年9月20日出版 山海堂

(2) 坪井善勝：平面構造論 P.137, P.153, 昭和30年6月15日発行 丸善

(3) 東洋一：一辺自由、対辺固定二対辺で弾性ばりに支えられる平板 日本建築学会論文報告集 60号 昭和33年10月

弾性梁に支えられる矩形床版の有限COSINE変換による解析

日本建築学会論文報告集 第54号(大会号) 昭和31年9月

(4) 岡元北海：特殊境界条件を有する平板の解法並びに弾性梁上の平板について

土木試験所報告 第10号 昭和27年1月

(5) 成田昌夫：撓角撓度法による一方向連続板の解法 土木学会論文集 昭和23年

(6) 山崎徳也、樗木武：周辺で単純支持された無梁板の解法 土木学会論文集 第136号 昭和41年12月

(7) 山崎徳也、樗木武：フーリエ級数による連続ばりおよびラーメンの解法

九州大学工学集報 第39巻 第3号 昭和41年10月