局部的等分布荷重を受ける矩形板の安定
—— 周辺単純支持と固定の場合 ——

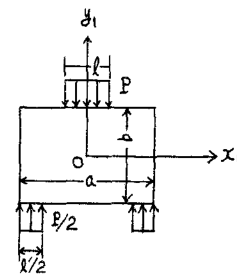
九州大学工学部　正員　山崎徳也

〃　学生員　○後藤恵之輔

1．緒言　構造物の構成要素としての矩形板の座屈荷重は土木、機械および航空構造物等の設計において重要なファクターであるが、局部的等分布荷重を受ける矩形板の安定問題に関する研究は比較的少なく、K. Girkmann[1]、L. Zetlin[2] および R.N. White 等[3] の報告があるに過ぎない。文献(1)は座屈の際の板の撓み波形の仮定に問題があり、高さ b と幅 a との比が 0.9 以上の板にしか適用できず、文献(2)は応力函数に制限があってこれを $b/a \geqq 1/3$ の板に適用することは妥当ではない。これらに対して文献(3)は $1/3 \leqq b/a \leqq 3$ の板も取扱っており非常に実用的ではあるが、(1)および(2)の結果との比較を行なっていず、また(1)、(2)がエネルギー法によっているのに対し、階差法を用いて解を得ている。そこで本論では一般形状の矩形板について(1)、(2)と同じくエネルギー法による座屈荷重の近似解を求めた。

まず矩形板の応力分布を正しく決定し、これに基づいてエネルギー法、なかんずく Raileigh-Ritz の方法によって座屈条件式を誘導した。矩形板の境界条件としては(i)周辺単純支持 (ii)周辺固定の場合を考え、おのおのについて座屈荷重を矩形板の二辺の比および荷重幅の荷重辺に対する比とを変数として算定した。

2．矩形板の応力分布　図−1 に示すごとく、x_1、y_1 直交座標を考え板の上縁中央に l なる幅に亘って等分布する圧縮荷重 P および下縁の両端に幅 $l'/2$ に亘って等分布する圧縮荷重 $P/2$ が作用するものとする。



図−1

簡単のため

$$x = 2x_1/a\ ,\ y = 2y_1/b\ ,\ \alpha = l/a\ ,\ \alpha' = l'/a\ ,\ \beta = a/b \quad \text{------}(1)$$

なる無次元数を用いることにする。

この場合の応力に関する境界条件は式(1)の記号を用いて次式のごとく表わされる。

$$\begin{aligned}
&x = \pm 1 \text{ にて} && \sigma_x = \tau_{xy} = 0 \\
&y = +1 \text{ にて} && \sigma_y = -\frac{2P}{ah}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi\alpha \cos n\pi x\right) \\
& && \tau_{xy} = 0 \\
&y = -1 \text{ にて} && \sigma_y = -\frac{2P}{ah}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi(1-\alpha')\cos n\pi x\right) \\
& && \tau_{xy} = 0 \qquad (\ h：板厚\ )
\end{aligned} \quad \text{------------}(2)$$

これを満足する応力系は次式で与えられる[4]。

$$\begin{aligned}
\sigma_x =\ & \frac{2P}{ah}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n \xi\left(\frac{n}{\beta}, y\right)\cos n\pi x + B_n \eta'(n\beta, x)\cos n\pi y\right\} - \frac{P}{\pi a h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\alpha}\sin n\pi\alpha + \frac{1}{\alpha'}\sin n\pi(1-\alpha')\right)\xi'\left(\frac{n}{\beta}, y\right)\cos n\pi x \\
& + \frac{2P}{ah}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n \eta(n\beta, x)\sin n\pi y + D_n \chi'\left(\frac{n}{\beta}, y\right)\cos n\pi x\right\} \\
\sigma_y =\ & -\frac{P}{ah} + \frac{2P}{ah}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n \eta\left(\frac{n}{\beta}, y\right)\cos n\pi x + B_n \xi(n\beta, x)\cos n\pi y\right\} - \frac{P}{\pi a h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\alpha}\sin n\pi\alpha + \frac{1}{\alpha'}\sin n\pi(1-\alpha')\right)\eta'\left(\frac{n}{\beta}, y\right)\cos n\pi x \\
& + \frac{2P}{ah}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n \xi(n\beta, x)\sin n\pi y + D_n \mu'\left(\frac{n}{\beta}, y\right)\cos n\pi x\right\} \\
\tau_{xy} =\ & \frac{2P}{ah}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n \zeta\left(\frac{n}{\beta}, y\right)\sin n\pi x + B_n \zeta(n\beta, x)\sin n\pi y\right\} - \frac{P}{\pi a h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\alpha}\sin n\pi\alpha + \frac{1}{\alpha'}\sin n\pi(1-\alpha')\right)\zeta'\left(\frac{n}{\beta}, y\right)\sin n\pi x \\
& + \frac{2P}{ah}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n \zeta(n\beta, x)\cos n\pi y + D_n \nu'\left(\frac{n}{\beta}, y\right)\sin n\pi x\right\}
\end{aligned} \quad \text{------------}(3)$$

たゞし．

$$\xi(\gamma,x)=H\{(\sinh\gamma\pi-\gamma\pi\cosh\gamma\pi)\cosh\gamma\pi x+\gamma\pi x\sinh\gamma\pi\sinh\gamma\pi x\}$$
$$\xi'(\gamma,x)=H'\{(\cosh\gamma\pi-\gamma\pi\sinh\gamma\pi)\sinh\gamma\pi x+\gamma\pi x\cosh\gamma\pi\cosh\gamma\pi x\}$$
$$\eta(\gamma,x)=H\{(\sinh\gamma\pi+\gamma\pi\cosh\gamma\pi)\cosh\gamma\pi x-\gamma\pi x\sinh\gamma\pi\sinh\gamma\pi x\}$$
$$\eta'(\gamma,x)=H'\{(\cosh\gamma\pi+\gamma\pi\sinh\gamma\pi)\sinh\gamma\pi x-\gamma\pi x\cosh\gamma\pi\cosh\gamma\pi x\}$$
$$\varsigma(\gamma,x)=H\cdot\gamma\pi(x\sinh\gamma\pi\cosh\gamma\pi x-\cosh\gamma\pi\sinh\gamma\pi x)$$
$$\varsigma'(\gamma,x)=H'\cdot\gamma\pi(x\cosh\gamma\pi\sinh\gamma\pi x-\sinh\gamma\pi\cosh\gamma\pi x)$$
$$\chi'(\gamma,x)=H'\{(2\sinh\gamma\pi-\gamma\pi\cosh\gamma\pi)\sinh\gamma\pi x+\gamma\pi x\sinh\gamma\pi\cosh\gamma\pi x\}$$
$$\mu'(\gamma,x)=H'\cdot\gamma\pi(\cosh\gamma\pi\sinh\gamma\pi x-x\sinh\gamma\pi\cosh\gamma\pi x)$$
$$\nu'(\gamma,x)=H'\{(\sinh\gamma\pi-\gamma\pi\cosh\gamma\pi)\cosh\gamma\pi x+\gamma\pi x\sinh\gamma\pi\sinh\gamma\pi x\}$$
$$\frac{1}{H}=\sinh\gamma\pi\cosh\gamma\pi+\gamma\pi \qquad \frac{1}{H'}=\sinh\gamma\pi\cosh\gamma\pi-\gamma\pi \qquad \text{----------- (4)}$$

定数A_n, B_n, C_nおよびD_nは次の連立方程式より決定せられる。

$$A_n+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+m+1}J\left(\frac{m}{\beta},j\right)J(j\beta,n)=-\frac{1}{2n\pi}\left(\frac{1}{\alpha}\sin n\pi\alpha-\frac{1}{\alpha'}\sin n\pi(1-\alpha')\right)$$
$$B_j=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(-1)^{n+1}J\left(\frac{n}{\beta},j\right)$$
$$C_n+\sum_{m=1}^{\infty}C_m\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+m+1}L(m\beta,j)K'\left(\frac{j}{\beta},n\right)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j}\left(\frac{1}{\alpha}\sin j\pi\alpha+\frac{1}{\alpha'}\sin j\pi(1-\alpha')\right)J'\left(\frac{j}{\beta},n\right)$$
$$D_n=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(-1)^{n+1}L(n\beta,j) \qquad \text{----------- (5)}$$

こゝに

$$J(\gamma,n)=\int_{-1}^{1}\xi(\gamma,x)\cos n\pi x\,dx=\frac{4(-1)^n n^2\gamma}{(n^2+\gamma^2)^2\pi}\ \frac{\sinh^2\gamma\pi}{\sinh\gamma\pi\cosh\gamma\pi+\gamma\pi}$$
$$J'(\gamma,n)=\int_{-1}^{1}\xi'(\gamma,x)\sin n\pi x\,dx=\frac{2(-1)^{n+1}n}{(n^2+\gamma^2)^2\pi}\ \frac{(n^2-\gamma^2)\sinh\gamma\pi\cosh\gamma\pi+\gamma\pi(n^2+\gamma^2)}{\sinh\gamma\pi\cosh\gamma\pi-\gamma\pi}$$
$$K'(\gamma,n)=\int_{-1}^{1}\chi'(\gamma,x)\sin n\pi x\,dx=\frac{4(-1)^{n+1}n^3}{(n^2+\gamma^2)^2\pi}\ \frac{\sinh^2\gamma\pi}{\sinh\gamma\pi\cosh\gamma\pi-\gamma\pi}$$
$$L(\gamma,n)=\int_{-1}^{1}\varsigma(\gamma,x)\sin n\pi x\,dx=\frac{4(-1)^n n\gamma^2}{(n^2+\gamma^2)^2\pi}\ \frac{\sinh^2\gamma\pi}{\sinh\gamma\pi\cosh\gamma\pi+\gamma\pi} \qquad \text{----------- (6)}$$

3．座屈の基本式　板の撓みをwとすると弾性座屈に対する基礎方程式は次式で与えられる。

$$D\Delta\Delta w=h\left(\sigma_x\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+2\tau_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial y_1}+\sigma_y\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}\right) \qquad \text{----------- (7)}$$

たゞしDは板の曲げ剛性である。問題は与えられた境界条件のもとに上式を解き固有値Pの最小値を求めればよいわけであるが、応力系が一定でないために上式は非線型微分方程式となりこれを直接積分することは非常に困難である。それゆえ本論では Raileigh-Ritz の方法を適用することにした。

いま座屈波形wを次のごとく仮定する。

$$w=\sum_m\sum_n a_{mn}X_m(x)Y_n(y) \qquad \text{----------- (8)}$$

こゝに$X_m(x)$および$Y_n(y)$はそれぞれ与えられた境界条件を満足するx、yの函数である。次に曲げによる歪みエネルギーをV、座屈の際に応力のなす仕事をTとすれば、それらは次のように表わされる。

$$V=\frac{D}{2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}\right)^2dx_1\,dy_1=\frac{2D}{a^2\beta}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\beta^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dx\,dy \qquad \text{----------- (9)}$$
$$T=-\frac{h}{2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left\{\sigma_x\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+2\tau_{xy}\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial y_1}+\sigma_y\left(\frac{\partial w}{\partial y_1}\right)^2\right\}dx_1\,dy_1$$
$$=-\frac{h}{2\beta}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\sigma_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2\beta\tau_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+\beta^2\sigma_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy \qquad \text{----------- (10)}$$

いま与えられた矩形板の有する全ポテンシャルエネルギーをΠとすれば、この問題の解は与えられた境界条件のもとにΠの停留値を求めることに帰するゆえ停留条件：$\delta\Pi=0$が成立する。したがってすべてのa_{mn}に関して次の方程式が成立しなければならない。

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_{mn}}=\frac{\partial V}{\partial a_{mn}}-\frac{\partial T}{\partial a_{mn}}=0 \qquad \text{----------- (11)}$$

上式から未定係数a_{mn}に関する同次連立方程式が得られるが、右辺はすべて0であるゆえ、この連立方程

式がa_{mn}の 0 でない有限な解に対して成立するためにはそれらの係数行列式が 0 に等しからねばならず、この行列式が求める座屈荷重Pを与える。

4. 周辺単純支持の場合　　この場合のwに関する境界条件は式(1)の記号を用いて次のごとく表わされる。

$$x=\pm 1 \text{ にて} \qquad w=0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\beta^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$
$$y=\pm 1 \text{ にて} \qquad w=0 \qquad \beta^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \qquad \text{-----------(12)}$$

こゝにνは板のポアッソン比である。上記の条件を満足する撓みwとしては、荷重条件がy軸に関して対称であることよりxについては常に偶函数となるがyについては偶函数の場合と奇函数の場合とが考えられるから、そのおのおのについて考えなければならない。すなわち

(a) wがyについて偶函数である場合

$$w=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}a_{mn}\cos\frac{m\pi}{2}x\cos\frac{n\pi}{2}y \qquad \text{-----------(13)}$$

(b) wがyについて奇函数である場合

$$w=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=2,4,6}^{\infty}a_{mn}\cos\frac{m\pi}{2}x\sin\frac{n\pi}{2}y \qquad \text{-----------(14)}$$

式(13)または式(14)を式(9)および式(10)に代入してV、Tを求めるとそれぞれ次のごとく得られる。複号はそれぞれ式(13)または式(14)に対応する。)

$$V=\frac{\pi^4 D}{8a^2\beta}\sum_m\sum_n a_{mn}^2(m^2+\beta^2 n^2)^2 \qquad \text{----------(15)}$$

$$\begin{aligned}T=&\frac{P\pi^2\beta}{8a}\sum_m\sum_n n^2 a_{mn}^2-\frac{P\pi^2}{16a\beta}\sum_m\sum_n\sum_p\sum_q a_{mn}a_{pq}\\&\times\Big[\frac{\beta^2}{(m-p)^2}A_{\frac{m-p}{2}}\Big\{(mq-np)^2\cdot N\Big(\frac{m-p}{2\beta},\frac{n-q}{2}\Big)\pm(mq+np)^2\cdot N\Big(\frac{m-p}{2\beta},\frac{n+q}{2}\Big)\Big\}+\frac{\beta^2}{(m+p)^2}A_{\frac{m+p}{2}}\Big\{(mq+np)^2\cdot N\Big(\frac{m+p}{2\beta},\frac{n-q}{2}\Big)\pm(mq-np)^2\cdot N\Big(\frac{m+p}{2\beta},\frac{n+q}{2}\Big)\Big\}\\&+\frac{1}{(n-q)^2}B_{\frac{n-q}{2}}\Big\{(mq-np)^2\cdot N\Big(\frac{n-q}{2}\beta,\frac{m-p}{2}\Big)+(mq+np)^2\cdot N\Big(\frac{n-q}{2}\beta,\frac{m+p}{2}\Big)\Big\}\pm\frac{1}{(n+q)^2}B_{\frac{n+q}{2}}\Big\{(mq+np)^2\cdot N\Big(\frac{n+q}{2}\beta,\frac{m-p}{2}\Big)+(mq-np)^2\cdot N\Big(\frac{n+q}{2}\beta,\frac{m+p}{2}\Big)\Big\}\Big]\end{aligned}$$
$$\text{---------(16)}$$

上式においてa_{pq}はa_{mn}と同一系統の係数を表わし、$N(\gamma,n)$は次式で定義されるものである。

$$N(\gamma,n)=\frac{4(-1)^n\gamma^3}{(n^2+\gamma^2)^2\pi}\ \frac{\sinh^2\gamma\pi}{\sinh\gamma\pi\cosh\gamma\pi+\gamma\pi} \qquad \text{----------(17)}$$

式(15)および式(16)を式(11)に代入すると各a_{mn}に関して次の条件式が得られる。

$$\begin{aligned}&\{2\pi(m^2+\beta^2n^2)^2/k\beta-2\beta^2n^2\}a_{mn}\\&+\sum_p\sum_q a_{pq}\Big[\frac{\beta^2}{(m-p)^2}A_{\frac{m-p}{2}}\Big\{(mq-np)^2N\Big(\frac{m-p}{2\beta},\frac{n-q}{2}\Big)\pm(mq+np)^2N\Big(\frac{m-p}{2\beta},\frac{n+q}{2}\Big)\Big\}+\frac{\beta^2}{(m+p)^2}A_{\frac{m+p}{2}}\Big\{(mq+np)^2N\Big(\frac{m+p}{2\beta},\frac{n-q}{2}\Big)\pm(mq-np)^2N\Big(\frac{m+p}{2\beta},\frac{n+q}{2}\Big)\Big\}\\&+\frac{1}{(n-q)^2}B_{\frac{n-q}{2}}\Big\{(mq-np)^2N\Big(\frac{n-q}{2}\beta,\frac{m-p}{2}\Big)+(mq+np)^2N\Big(\frac{n-q}{2}\beta,\frac{m+p}{2}\Big)\Big\}\pm\frac{1}{(n+q)^2}B_{\frac{n+q}{2}}\Big\{(mq+np)^2N\Big(\frac{n+q}{2}\beta,\frac{m-p}{2}\Big)+(mq-np)^2N\Big(\frac{n+q}{2}\beta,\frac{m+p}{2}\Big)\Big\}\Big]\\&=0\end{aligned} \qquad \text{-----------(18)}$$

こゝに
$$k=Pb/\pi D \qquad \text{----------(19)}$$

式(18)よりa_{mn}に関する同次連立方程式が求まり、この係数行列式を 0 とおくことによってkの決定式が得られる。この式において荷重幅比αとα'および辺比βが与えられればA_n、B_nは式(5)から定まるゆえ未知数はkのみとなり、これを試索法により決定すればよい。かくして得られたkの最小値を原連立方程式に代入すれば各a_n間の関係が得られ、したがってその場合の座屈波形wが決定される。

5. 周辺固定の場合　　この場合のwに関する境界条件は次のごとくである。

$$x=\pm 1 \text{ にて} \qquad w=0 \qquad \frac{\partial w}{\partial x}=0$$
$$y=\pm 1 \text{ にて} \qquad w=0 \qquad \frac{\partial w}{\partial y}=0 \qquad \text{-----------(20)}$$

上記の条件を満足するwは前と同様二つの場合に分けて考えなければならない。

(a) w が y について偶函数である場合　　w を次のごとく仮定する。

$$w=\sum_{m=1,2,3}^{\infty}\sum_{n=1,2,3}^{\infty}a_{mn}\{(-1)^{m+1}+\cos m\pi x\}\{(-1)^{n+1}+\cos n\pi y\} \quad \text{------------ (21)}$$

これを用いて前と同様にして次の座屈条件式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\{8\pi(m^2+\beta^2n^2)^2/k\beta-2\beta^2n^2\}a_{mn}+16\pi(-1)^n m^4/k\beta\sum_q(-1)^q a_{mq}+4(-1)^m\beta^2n^2(4\pi\beta^2n^2/k\beta-1)\sum_p(-1)^p a_{pn}\\
&+\sum_p\sum_q a_{pq}\Big[A_m\,2(-1)^{p+1}q^2\beta^2\{2(-1)^{n+1}N(\tfrac{m}{\beta},q)+N(\tfrac{m}{\beta},n\sim q)+N(\tfrac{m}{\beta},n+q)\}+A_p\,2(-1)^{m+1}n^2\beta^2\{2(-1)^{q+1}N(\tfrac{p}{\beta},n)+N(\tfrac{p}{\beta},n\sim q)+N(\tfrac{p}{\beta},n+q)\}\\
&\quad+A_{m\sim p}\tfrac{\beta^2}{(m-p)^2}\{2(-1)^{n+1}m^2q^2N(\tfrac{m\sim p}{\beta},q)+2(-1)^{q+1}n^2p^2N(\tfrac{m\sim p}{\beta},n)+(mq-np)^2N(\tfrac{m\sim p}{\beta},n\sim q)+(mq+np)^2N(\tfrac{m\sim p}{\beta},n+q)\}\\
&\quad+A_{m+p}\tfrac{\beta^2}{(m+p)^2}\{2(-1)^{n+1}m^2q^2N(\tfrac{m+p}{\beta},q)+2(-1)^{q+1}n^2p^2N(\tfrac{m+p}{\beta},n)+(mq+np)^2N(\tfrac{m+p}{\beta},n\sim q)+(mq-np)^2N(\tfrac{m+p}{\beta},n+q)\}\\
&\quad+B_n\,2(-1)^{q+1}p^2\{2(-1)^{m+1}N(n\beta,p)+N(n\beta,m\sim p)+N(n\beta,m+p)\}+B_q\,2(-1)^{n+1}m^2\{2(-1)^{p+1}N(q\beta,m)+N(q\beta,m\sim p)+N(q\beta,m+p)\}\\
&\quad+B_{n\sim q}\tfrac{1}{(n-q)^2}\{2(-1)^{p+1}m^2q^2N(\overline{n\sim q}\beta,m)+2(-1)^{m+1}n^2p^2N(\overline{n\sim q}\beta,p)+(mq-np)^2N(\overline{n\sim q}\beta,m\sim p)+(mq+np)^2N(\overline{n\sim q}\beta,m+p)\}\\
&\quad+B_{n+q}\tfrac{1}{(n+q)^2}\{2(-1)^{p+1}m^2q^2N(\overline{n+q}\beta,m)+2(-1)^{m+1}n^2p^2N(\overline{n+q}\beta,p)+(mq+np)^2N(\overline{n+q}\beta,m\sim p)+(mq-np)^2N(\overline{n+q}\beta,m+p)\}\Big]=0 \quad \cdot(22)
\end{aligned}$$

(b) w が y について奇函数である場合　　w を次のごとく仮定する。

$$w=\sum_{m=1,2,3}^{\infty}\sum_{n=2,3,4}^{\infty}a_{mn}\{(-1)^{m+1}+\cos m\pi x\}\{(-1)^n n\sin\pi y+\sin n\pi y\} \quad \text{---------- --- (23)}$$

これより次の座屈条件式を得る。

$$\begin{aligned}
&\{8\pi(m^2+\beta^2n^2)^2/k\beta-2\beta^2n^2\}a_{mn}+2(-1)^n n\{4\pi(m^2+\beta^2)^2/k\beta-\beta^2\}\sum_q(-1)^q q\,a_{mq}+4(-1)^m\beta^2n^2\{4\pi\beta^2n^2/k\beta-1\}\sum_p(-1)^p a_{pn}\\
&+\sum_p\sum_q a_{pq}\Big\{4(-1)^{m+n+p+q}\beta^2nq(4\pi\beta^2/k\beta-1)+A_m\,2(-1)^{p+1}q\beta^2\big[(-1)^n nq\{N(\tfrac{m}{\beta},q-1)-N(\tfrac{m}{\beta},q+1)\}+(-1)^q\{N(\tfrac{m}{\beta},n-1)-N(\tfrac{m}{\beta},n+1)\}\\
&\quad+(-1)^{n+q}n\{N(\tfrac{m}{\beta},0)-N(\tfrac{m}{\beta},2)\}+q\{N(\tfrac{m}{\beta},n\sim q)-N(\tfrac{m}{\beta},n+q)\}\big]+A_p\cdot2(-1)^{m+1}n\beta^2\big[(-1)^q nq\{N(\tfrac{p}{\beta},n-1)-N(\tfrac{p}{\beta},n+1)\}+(-1)^n\{N(\tfrac{p}{\beta},q-1)-N(\tfrac{p}{\beta},q+1)\}\\
&\quad+(-1)^{n+q}q\{N(\tfrac{p}{\beta},0)-N(\tfrac{p}{\beta},2)\}+n\{N(\tfrac{p}{\beta},n\sim q)-N(\tfrac{p}{\beta},n+q)\}\big]+\tfrac{\beta^2}{(m-p)^2}A_{m\sim p}\big[(-1)^{n+q}nq\{(m-p)^2N(\tfrac{m\sim p}{\beta},0)-(m+p)^2N(\tfrac{m\sim p}{\beta},2)\}\\
&\quad+(-1)^n n\{(p-mq)^2N(\tfrac{m\sim p}{\beta},q-1)-(p+mq)^2N(\tfrac{m\sim p}{\beta},q+1)\}+(-1)^q q\{(m-np)^2N(\tfrac{m\sim p}{\beta},n-1)-(m+np)^2N(\tfrac{m\sim p}{\beta},n+1)\}+(mq-np)^2N(\tfrac{m\sim p}{\beta},n\sim q)-(mq+np)^2N(\tfrac{m\sim p}{\beta},n+q)\big]\\
&\quad+\tfrac{\beta^2}{(m+p)^2}A_{m+p}\big[(-1)^{n+q}nq\{(m+p)^2N(\tfrac{m+p}{\beta},0)-(m-p)^2N(\tfrac{m+p}{\beta},2)\}+(-1)^n n\{(p+mq)^2N(\tfrac{m+p}{\beta},q-1)-(p-mq)^2N(\tfrac{m+p}{\beta},q+1)\}+(-1)^q q\{(m+np)^2N(\tfrac{m+p}{\beta},n-1)-(m-np)^2N(\tfrac{m+p}{\beta},n+1)\}\\
&\quad+(mq+np)^2N(\tfrac{m+p}{\beta},n\sim q)-(mq-np)^2N(\tfrac{m+p}{\beta},n+q)\big]+(-1)^{n+q+1}\tfrac{nq}{4}B_2\{2(-1)^{p+1}m^2N(2\beta,m)+2(-1)^{m+1}p^2N(2\beta,p)+(m+p)^2N(2\beta,m\sim p)+(m-p)^2N(2\beta,m+p)\}\\
&\quad+(-1)^q\tfrac{q}{(n-1)^2}B_{n-1}\{2(-1)^{p+1}m^2N(\overline{n-1}\beta,m)+2(-1)^{m+1}n^2p^2N(\overline{n-1}\beta,p)+(m-np)^2N(\overline{n-1}\beta,m\sim p)+(m+np)^2N(\overline{n-1}\beta,m+p)\}\\
&\quad-(-1)^q\tfrac{q}{(n+1)^2}B_{n+1}\{2(-1)^{p+1}m^2N(\overline{n+1}\beta,m)+2(-1)^{m+1}n^2p^2N(\overline{n+1}\beta,p)+(m+np)^2N(\overline{n+1}\beta,m\sim p)+(m-np)^2N(\overline{n+1}\beta,m+p)\}\\
&\quad+(-1)^n\tfrac{n}{(q-1)^2}B_{q-1}\{2(-1)^{m+1}p^2N(\overline{q-1}\beta,p)+2(-1)^{p+1}m^2q^2N(\overline{q-1}\beta,m)+(p-mq)^2N(\overline{q-1}\beta,m\sim p)+(p+mq)^2N(\overline{q-1}\beta,m+p)\}\\
&\quad-(-1)^n\tfrac{n}{(q+1)^2}B_{q+1}\{2(-1)^{m+1}p^2N(\overline{q+1}\beta,p)+2(-1)^{p+1}m^2q^2N(\overline{q+1}\beta,m)+(p+mq)^2N(\overline{q+1}\beta,m\sim p)+(p-mq)^2N(\overline{q+1}\beta,m+p)\}\\
&\quad+\tfrac{1}{(n-q)^2}B_{n\sim q}\{(mq-np)^2N(\overline{n\sim q}\beta,m\sim p)+(mq+np)^2N(\overline{n\sim q}\beta,m+p)\}-\tfrac{1}{(n+q)^2}B_{n+q}\{(mq+np)^2N(\overline{n+q}\beta,m\sim p)+(mq-np)^2N(\overline{n+q}\beta,m+p)\}\Big\}=0 \cdots(24)
\end{aligned}$$

k は式 (22) または式 (24) から前と同様にして求めればよい。

6. 結び　　本論は外力として板中央部に等分布圧縮荷重が作用し、反力として下縁両端部に等分布する圧縮荷重が作用する場合に対し、周辺単純支持および固定の条件のもとに、座屈荷重を荷重幅比と板の二辺の比とを変数として決定する座屈条件式を求めたものである。他の境界条件、たとえば荷重辺が固定で他対辺が単純支持のような場合に対しても同様の手法を行なえばよく、これらについては逐次発表する予定である。

文献 (1) K. Girkmann, International Association for Bridge and Structural Engineering, Final Report, 1936

(2) L. Zetlin, Proc. Paper 795, ASCE, Vol. 81, September, 1955

(3) R. N. White and W. S. Cottingham, Proc. Paper 3297, ASCE, Vol. 88, No. EM5, October, 1962

(4) 大久保 肇, 日本機械学会論文集, 才8巻才33号, 昭和17年11月