

緒言 著者らはさきに軸線が3次元的に変化する空間部材を対象としてエネルギー法に基づく解析理論の一般的確立¹⁾を計り、さらにこれを Helicoid 部材に適用して同部材をもつ立体骨組構造物の応力解析に関する一連の研究を行ってきた。その際、軸力およびせん断力の影響を無視して計算を進めたので、本論文ではこれらの要素を更めて導入し、数値計算を行って Helicoid 部材をもつ立体ラメンの合理的設計に資すべく、その力学的特性に関する一般の考察を試みた。

1. 変形公式

軸線が3次元的に変化する空間部材の変形公式は既に一般3次元たわみ角式¹⁾として誘導したが、軸力およびせん断力の導入過程を明白にするためにその概略を以下に列記する。

すなわち、基本系として図-1の²⁾とを片持梁 AB を想定し、部材の特性に依りて適宜選んだ'定点 G と自由端 A を $I \rightarrow \infty$ の剛接ぎで連結し、G 点にモーメントベクトル M_G および力ベクトル F_G を不静定力として働かせる。

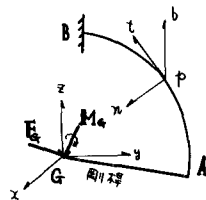


図-1

表-1

	e_x	e_y	e_z
e_t	l_1	m_1	n_1
e_n	l_2	m_2	n_2
e_b	l_3	m_3	n_3

ここで G 点に直角デカルト座標 (x, y, z) を、部材の任意点 p 右手系流動座標 (t, n, b) を採用する。これらの座標に関する単位ベクトル e の間には表-1の関係が成立する。

図-1において部材上の任意点 p におけるモーメントおよび力ベクトルはそれぞれ次の³⁾とく表わされる。

$$M_p = M_G - t \times F_G + C_p, \quad F_p = F_G + P_p \quad (1)$$

(ここに $r = Gp$: 任意点 p の位置ベクトル, C_p : 荷重による p 点のモーメントベクトル,

P_p : 荷重による p 点の力ベクトル)

式(1)より部材全体に生じる歪エネルギー W は

$$W = \delta_0 / 2EI_0 \int_0^s \left\{ (M_p)(D)(M_p)^T + (L_p F_p)(D')(L_p F_p)^T \right\} ds / s_0 \quad (2)$$

$$\text{ここに } (M_p) = (M_p^t, M_p^n, M_p^b), \quad (L_p F_p) = (L_p F_p^t, L_p F_p^n, L_p F_p^b)$$

$$(D) = \begin{pmatrix} EI_0/GJ & 0 & 0 \\ 0 & EI_0/EI_n & 0 \\ 0 & 0 & EI_0/EI_b \end{pmatrix} \quad (D') = \begin{pmatrix} EI_0/Ea\theta^2 & 0 & 0 \\ 0 & knEI_0/GA\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & kbEI/GA\theta^2 \end{pmatrix}$$

ただし、肩字 T は転置行列を示す記号で、GJ: 接り剛性

E: ヤング率, I_n, I_b, I_0 : n, b 軸に関する慣性モーメントおよび標準慣性モーメント

K_n, K_b : n, b 軸に関する断面定数, S_o, l_o : 部材長さおよび無次元化のための標準長さ

A : 断面積

いま G 点の変形ベクトルを U_G で表わせば, Castigliano の定理により次のごとく求められる。

$$(U_G) = (\partial W / \partial Q_G) \quad (3)$$

$$\text{ただし } (Q_G) = \begin{pmatrix} M_G \\ F_G \end{pmatrix}$$

式(3)に式(2)を代入のうえ整理すれば結局次式となる。

$$(U_G) = S_o / EI_o \{ (A)(Q_G) + (H) \} \quad (4)$$

$$\text{ここに } (A): \text{部材形状による定数行列}, (H) = (L, T)^T = \{ (L^T L^T L^T), (T_x T_y T_z) \}$$

A, B 両端と G 点との回転角および変位ベクトル空間には、一般に次式が成立する。

$$(\theta_G) = \theta_A - \theta_B, \quad \Delta_G = \Delta_A - \Delta_B + r_A \times \theta_A - r_B \times \theta_B \quad (5)$$

ただし r_A, r_B はそれぞれ $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}$ なる位置ベクトルである。

式(5)を行列表示して

$$(U_G) = (b)(U_A, U_B)^T \quad (6)$$

ここに (b) は部材形状による定数行列で詳細は文献(1)を参照のこと。

式(4), (6)により不静定力 (Q_G) が次のごとく定まる。

$$(Q_G) = EK_o (A)^{-1} (b)(U_A, U_B)^T - (A)^{-1} (H), \quad \text{ただし } K_o = I_o / S_o \quad (7)$$

一方材端 A, B の一般力ベクトルは $(Q_A) = (Q)_{(p=A)}, (Q_B) = -(Q)_{(p=B)}$ と表わされるから、これを行列表示して

$$\begin{pmatrix} Q_A \\ Q_B \end{pmatrix} = (b)^T (Q_G) + (C) \quad (8)$$

式(8)に式(7)を代入して次のごとく必要の変形公式とする。

$$\begin{pmatrix} Q_A \\ Q_B \end{pmatrix} = EK_o (K)(U_A, U_B)^T + (C^*) \quad (9)$$

$$\text{ここに } (K) = (b)^T (A)^{-1} (b), (C^*) = (C) - (b)^T (A)^{-1} (H)$$

上記誘導公式の係数行列 (A) および荷重項に関する行列 (H) の内容を明らかにするため、文献(4)で用いた符号規約をそのまま適用して個々の行列要素を求めれば、以下のごとくである。すなわち位置を指定する λ_i, μ_i, ν_i ($i=1, 2, 3$) と部材形状に関する τ_i, Λ_i の諸値を下記のごとく定義導入する。

$$\text{すなわち } \lambda_1 = n_1 r_y - m_1 r_x, \quad \mu_1 = l_1 r_z - n_1 r_x, \quad \nu_1 = m_1 r_x - l_1 r_y$$

$$\lambda_2 = n_2 r_y - m_2 r_x, \quad \mu_2 = l_2 r_z - n_2 r_x, \quad \nu_2 = m_2 r_x - l_2 r_y$$

$$\lambda_3 = n_3 r_y - m_3 r_x, \quad \mu_3 = l_3 r_z - n_3 r_x, \quad \nu_3 = m_3 r_x - l_3 r_y$$

$$\tau_1 = EI_o / GJ, \quad \tau_2 = EI_o / EI_n, \quad \tau_3 = EI_o / EI_b$$

$$\Lambda_1 = EI_o / EA l_o^2, \quad \Lambda_2 = K_n EI_o / GA l_o^2, \quad \Lambda_3 = K_b EI_o / GA l_o^2$$

$h \times b$ の矩形状断面を例にとり、 $I_o = I_b$ とおけば $\tau_1 = EI_b / GJ, \tau_2 = I_b / I_n, \tau_3 = 1$, および $\Lambda_1 = (S_o b / 4h) \times R^2, \Lambda_2 = \Lambda_1 K_n E / G, \Lambda_3 = \Lambda_1 K_b E / G$ となる。ここに $R = h / S_o, a_i$: Helicoid 部材の曲率半径

上式により (A) の行列要素 $a_{ij} (=A_{ji})$ の内容はそれぞれ次のごとく表わされることとなる。

$$\text{すなわち } a_{11} = 1/S_o \{ (\tau_1 e_1^2 + \tau_2 e_2^2 + \tau_3 e_3^2) A S \} \quad a_{12} = 1/S_o \{ (\tau_1 l_1 m_1 + \tau_2 l_2 m_2 + \tau_3 l_3 m_3) A S \}$$

$$\begin{aligned}
a_{13} &= 1/s_0 \left\{ (z_1 \ell_1 n_1 + z_2 \ell_2 n_2 + z_3 \ell_3 n_3) dS \right\} & a_{14} &= 1/s_0 \left\{ (z_1 \ell_1 \lambda_1 + z_2 \ell_2 \lambda_2 + z_3 \ell_3 \lambda_3) dS \right\} \\
a_{15} &= 1/s_0 \ell_0 \left\{ (z_1 \ell_1 \mu_1 + z_2 \ell_2 \mu_2 + z_3 \ell_3 \mu_3) dS \right\} & a_{16} &= 1/s_0 \ell_0 \left\{ (z_1 \ell_1 v_1 + z_2 \ell_2 v_2 + z_3 \ell_3 v_3) dS \right\} \\
a_{22} &= 1/s_0 \left\{ (z_1 m_1^2 + z_2 m_2^2 + z_3 m_3^2) dS \right\} & a_{23} &= 1/s_0 \left\{ (z_1 m_1 n_1 + z_2 m_2 n_2 + z_3 m_3 n_3) dS \right\} \\
a_{24} &= 1/s_0 \ell_0 \left\{ (z_1 m_1 \lambda_1 + z_2 m_2 \lambda_2 + z_3 m_3 \lambda_3) dS \right\} & a_{25} &= 1/s_0 \ell_0 \left\{ (z_1 m_1 \mu_1 + z_2 m_2 \mu_2 + z_3 m_3 \mu_3) dS \right\} \\
a_{26} &= 1/s_0 \ell_0 \left\{ (z_1 m_1 v_1 + z_2 m_2 v_2 + z_3 m_3 v_3) dS \right\} & a_{33} &= 1/s_0 \left\{ (z_1 n_1^2 + z_2 n_2^2 + z_3 n_3^2) dS \right\} \\
a_{34} &= 1/s_0 \ell_0 \left\{ (z_1 n_1 \lambda_1 + z_2 n_2 \lambda_2 + z_3 n_3 \lambda_3) dS \right\} & a_{35} &= 1/s_0 \ell_0 \left\{ (z_1 n_1 v_1 + z_2 n_2 v_2 + z_3 n_3 v_3) dS \right\} \\
a_{36} &= 1/s_0 \ell_0^2 \left\{ (z_1 n_1 v_1 + z_2 n_2 v_2 + z_3 n_3 v_3) dS \right\} \\
a_{44} &= 1/s_0 \ell_0^2 \left\{ (z_1 \lambda_1^2 + z_2 \lambda_2^2 + z_3 \lambda_3^2 + \Delta_1 \ell_1^2 + \Delta_2 \ell_2^2 + \Delta_3 \ell_3^2) dS \right\} \\
a_{45} &= 1/s_0 \ell_0^2 \left\{ (z_1 \lambda_1 \mu_1 + z_2 \lambda_2 \mu_2 + z_3 \lambda_3 \mu_3 + \Delta_1 \ell_1 m_1 + \Delta_2 \ell_2 m_2 + \Delta_3 \ell_3 m_3) dS \right\} \\
a_{46} &= 1/s_0 \ell_0^2 \left\{ (z_1 \lambda_1 v_1 + z_2 \lambda_2 v_2 + z_3 \lambda_3 v_3 + \Delta_1 \ell_1 n_1 + \Delta_2 \ell_2 n_2 + \Delta_3 \ell_3 n_3) dS \right\} \\
a_{55} &= 1/s_0 \ell_0^2 \left\{ (z_1 \mu_1^2 + z_2 \mu_2^2 + z_3 \mu_3^2 + \Delta_1 m_1^2 + \Delta_2 m_2^2 + \Delta_3 m_3^2) dS \right\} \\
a_{56} &= 1/s_0 \ell_0^2 \left\{ (z_1 \mu_1 v_1 + z_2 \mu_2 v_2 + z_3 \mu_3 v_3 + \Delta_1 m_1 n_1 + \Delta_2 m_2 n_2 + \Delta_3 m_3 n_3) dS \right\}
\end{aligned} \tag{10}$$

また(II)の行列要素 L_k, T_k ($k = x, y, z$) の内容に

$$\begin{aligned}
L_x &= 1/s_0 \left\{ (z_1 \ell_1 C_p^x + z_2 \ell_2 C_p^x + z_3 \ell_3 C_p^x) dS \right\} & L_y &= 1/s_0 \left\{ (z_1 m_1 C_p^y + z_2 m_2 C_p^y + z_3 m_3 C_p^y) dS \right\} \\
L_z &= 1/s_0 \left\{ (z_1 n_1 C_p^z + z_2 n_2 C_p^z + z_3 n_3 C_p^z) dS \right\} \\
T_x &= 1/s_0 \ell_0 \left\{ (z_1 \lambda_1 C_p^x + z_2 \lambda_2 C_p^x + z_3 \lambda_3 C_p^x + \Delta_1 \ell_1 P_p^x + \Delta_2 \ell_2 P_p^x + \Delta_3 \ell_3 P_p^x) dS \right\} \\
T_y &= 1/s_0 \ell_0 \left\{ (z_1 \mu_1 C_p^y + z_2 \mu_2 C_p^y + z_3 \mu_3 C_p^y + \Delta_1 m_1 P_p^y + \Delta_2 m_2 P_p^y + \Delta_3 m_3 P_p^y) dS \right\} \\
T_z &= 1/s_0 \ell_0 \left\{ (z_1 v_1 C_p^z + z_2 v_2 C_p^z + z_3 v_3 C_p^z + \Delta_1 n_1 P_p^z + \Delta_2 n_2 P_p^z + \Delta_3 n_3 P_p^z) dS \right\}
\end{aligned} \tag{11}$$

以上の式(10),(11)の結果より明白なごとく軸力およびせん断力の影響因子 Δ_i ($i=1,2,3$) は、(II)の要素である(II)の要素である(II)にそれぞれ補正項として入っている。よって計算に当っては軸力およびせん断力を無視して文献(1)に誘導した該当諸項に Δ_i の項を単に加算すればよい。

さて本研究の対象とする Helicoid 部材について上述の a_{ij}, T_k の補正項をそれぞれ a_{ij}', T_k' と表現し、これを算定すれば次の式で与えられる。

$$\begin{aligned}
a_{44}' &= (\Delta_1 \cos \alpha + \Delta_3 \sin^2 \alpha / \cos \alpha) \int \sin^2 \varphi d\varphi + \Delta_2 / \cos \alpha \int \cos^2 \varphi d\varphi \\
a_{45}' &= (-\Delta_1 \cos \alpha + \Delta_2 / \cos \alpha - \Delta_3 \sin^2 \alpha / \cos \alpha) \int \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\
a_{46}' &= (-\Delta_1 + \Delta_3) \sin \alpha \int \sin \varphi d\varphi \\
a_{55}' &= (\Delta_1 \cos \alpha + \Delta_3 \sin^2 \alpha / \cos \alpha) \int \cos^2 \varphi d\varphi + \Delta_2 / \cos \alpha \int \sin^2 \varphi d\varphi \\
a_{56}' &= (\Delta_1 - \Delta_3) \sin \alpha \int \cos \varphi d\varphi \\
a_{66}' &= (\Delta_1 \sin^2 \alpha / \cos \alpha + \Delta_3) \int d\varphi
\end{aligned} \tag{12}$$

2. 数値計算例

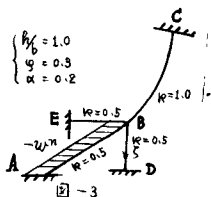
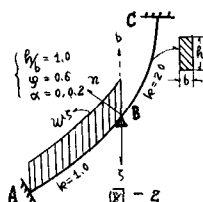


図-2に示す両端固定の2スパン連続Helicoid桁が鉛直等分布荷重 W^5 (b軸と逆向きと5軸とする)を受ける場合と図-3の直線部材AB, BD, BEおよびHelicoid部材BCより構成される立体ラーメンが水平等分布荷重 W^5 を受ける例について解析する。(ただし φ : Helicoid部材の水平角, α : Helicoidアングルの)

軸力およびせん断力の効果を表わす R を0, 0.02に選んで各々の場合の材端モーメントおよび反力をそれぞれ文獻(2)の方法で算定した。軸面の組合上誘導過程を省略し結果のみを表-2, 表-3にまとめて列記した。

表-2 連続Helicoid桁の端モーメントおよび反力 (図-2参照)

	M_{AB}^0	M_{BA}^0	M_{BC}^0	M_{CB}^0	M_{BD}^0	M_{DB}^0	M_{BE}^0	M_{EB}^0	M_{BC}^0	M_{CB}^0	M_{BD}^0	M_{DB}^0	M_{BE}^0	M_{EB}^0	F_{AB}^0	F_{BC}^0	F_{BD}^0	F_{BE}^0	F_{BC}^0	F_{BD}^0
$R=0$	0.016	-0.140	0.304	-0.008	-3.660	2.076	-2.075	-1.093	0.129	0.175	-0.129	0.027	8.300	8.209	-0.027	0.273	-32.566	-5.212		
$R=0.02$	0.014	-0.142	0.307	-0.004	-3.660	2.071	-2.074	-1.092	0.143	0.143	-0.074	-0.044	7.398	2.214	-0.316	0.487	-32.577	-5.236		

($\times 10^{-2} a^2 W^5$)

表-3 Helicoid部材をもつ立体ラーメンの端モーメントおよび反力 (図-3参照)

	M_{BA}^0	M_{BD}^0	M_{BE}^0	M_{BC}^0	M_{BA}^0	M_{BD}^0	M_{BE}^0	M_{BC}^0	M_{BA}^0	M_{BD}^0	M_{BE}^0	M_{BC}^0	F_{BC}^0	F_{BC}^0	F_{BC}^0
$R=0$	0.03	0.12	0.12	-0.03	2.10	2.10	0.53	4.16	851.64	-37.09	-148.36	-666.13	48724.41	8683.26	-109.13
$R=0.02$	0.04	0.16	0.16	-0.34	0.92	0.72	0.18	-1.62	792.69	-51.93	-207.32	-633.52	15542.45	4356.34	-35.78

($\times 1/1200 \cdot a^2 W^5$)

図-2の例の α と φ と変形率の主体が軸力およびせん断力の影響の小さい軸面外変形である場合は表-2より明らかなごとく R 無視による誤差は極めて微小であることが認められる。これに対して図-3の例では R の影響は極めて大なることが表-3の結果より判読され、これは軸力およびせん断力の影響の大きい軸面外変形が主体となることに起因し、モーメントの絶対量が一番大きい M_{BC}^0 に例にとれば、 R 無視による最大誤差は約28.5%に達し、また反力の場合にはそれを大に上回る差異を生じている。以上の結果より軸面内変形が主なる構造物においては、軸力およびせん断力の影響が絶対に無視できぬものであることが確認される。

結語 軸力およびせん断力無視による誤差は構造形式と荷重の種類により左右され、上述のごとき典型例を除けば誤差の大小は一概には定めえず、ましてそれが安全側であるか否かは全く断定できない。いづれにしてもこの要素を無視した既往の設計計算においては、応力の過小評価あるいは過大評価を余儀なくされ、前者では降伏応力に対して余裕がなく危険であり、後者は構造材料の不経済という結果をもたらすとともに正鵠をえていない。

文献 (1) T.YAMASAKI AND T.OTA : Three-Dimensional Slope-Deflection of Noncoplanar Member.

Proc of the 14th. J.N.C. for A.M.1964

(2) 山崎, 太田, 後藤 : ヘリコイド格子の解法, 土木学会西部支部 研究発表会論文集, 昭和41年11月

" : 連続ヘリコイド桁およびヘリコイド格子桁の解法, 九工大学集報, 第39巻第3号 昭和41年10月.