

軸線を含む面に垂直な荷重を受ける連続円形曲り梁の解法

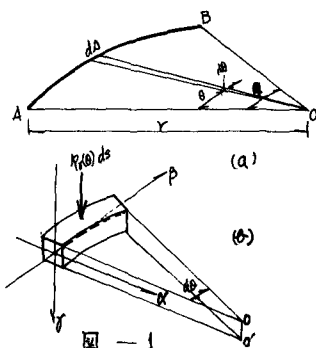
九州大学 正員 山崎徳也

〃 〃 〇 橋 本 武

1. 緒言 高速道路、高架鉄道等における曲線橋の中で扇形板と円形曲り梁（以下円梁と称す）とが一体結合した構造物が多く見受けられる。扇形板と円梁とを一体解析するために、その連続条件から両者を同一函数系により解く必要がある。すなわち、扇形板の解が一般に無限級数式で与えられる中、円梁も同じ無限級数式で解かねばならない。また、扇形板の板面に対して垂直な任意荷重が作用する場合に円梁が扇形板から伝えらるる諸力はいずれも軸線を含む面に垂直な力およびモーメントである。以上の事実を鑑み、本研究は扇形板と円梁とからなる一体構造物の解法における基礎理論として、軸線を含む面に垂直な荷重を受ける連続円形曲り梁（以下連続円梁と称す）の無限級数式による解法を述べるものである。

2 円梁の基礎理論

(1) 円梁の弾性曲線 図-1(a)に示すごとく、断面一樣な円梁の回転中心をO、半径を r および周角を θ とする。基準AOより角度 θ の位置にある円梁の微小部分 ds を取り出せば図-1(b)のごとくなり、これに法線方向を α 軸、接線方向を β 軸および断面に直交して γ 軸をとり移動座標 (α, β, γ) を導入する。かかるとき、円梁の軸線を含む面に垂直な荷重は γ 軸方向の荷重 $p_\gamma(\theta)$ および α 、 β 軸を回転軸とするモーメント荷重 $m_\alpha(\theta)$ 、 $m_\beta(\theta)$ である。 $m_\alpha(\theta)$ 、 $m_\beta(\theta)$ については別途報告することとし、本講演では $p_\gamma(\theta)$ のみが円梁に作用する場合について述べることにすれば



円梁の基礎微分方程式は次式で表わされる⁽¹⁾。

$$\frac{d^4 w}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 w}{d\theta^2} + \frac{d^2 w}{d\theta^2} = \frac{r^4}{EI_\alpha} \frac{d^2 p_\gamma(\theta)}{d\theta^2} - \frac{r^4}{GI_\beta} p_\gamma(\theta) \quad \text{ここに、} w = \gamma \text{軸方向のたわみ} \quad (1)$$

$EI_\alpha = \alpha$ 軸まわりの曲げ剛性、 $GI_\beta = \beta$ 軸まわりの捩り剛性

式(1)の全函数を w 、特殊解を w_0 とすれば一般解 w は次式で与えられる。 $w = w_1 + w_0$ (2)

全函数 w は式(1)の斉次方程式より次のごとく与えられる。 (3)

$w_1 = C_1 + C_2 \theta + (C_3 + C_4 \theta) \sin \theta + (C_5 + C_6 \theta) \cos \theta$ (ここに $C_1 \sim C_6$ は積分定数である) (3)

他方、特殊解 w_0 を求めるため、荷重 $p_\gamma(\theta)$ が θ に関する直交函数系 $\xi_n(\theta)$ にて級数展開可能であり、また w_0 が $\xi_n(\theta)$ の級数展開式で与えられるものと仮定する。すなわち、

$$p_\gamma(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \xi_n(\theta) \quad \text{ここに} \quad \gamma_n = \frac{1}{M_n^2} \int_0^\theta p_\gamma(\theta) \xi_n(\theta) d\theta, \quad M_n^2 = \int_0^\theta \xi_n^2(\theta) d\theta \quad (4)$$

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \xi_n(\theta) \quad \text{ここに} \quad \omega_n = \beta \text{任意常数} \quad (5)$$

さらに、直交函数系 $\xi_n(\theta)$ を導入し、 $\xi_n(\theta)$ と $\xi_m(\theta)$ との間には次の関係が成立するものとす。

$$\xi_n'(\theta) = R_F \xi_n(\theta) \quad \xi_n''(\theta) = R_F \xi_n(\theta) \quad \text{ここに} \quad R_F, R_F \text{ は常数} \quad (6)$$

式(4)、(5)および式(6)の関係を式(1)に代入すれば、式(5)における任意常数 ω_n が求まり次式となる。

$$\omega_n = \frac{r^4}{EI_\alpha} \frac{R_F \gamma_n - 1/\mu}{R_F R_F (R_F R_F + 1)^2} \gamma_n \quad \text{ここに} \quad \mu = GI_\beta / EI_\alpha \quad (7)$$

式(7)を式(4)に代入し、その結果を式(2)に代入すれば式(1)の一般解が次のごとく与えられる。

$$w = C_1 + C_2\theta + (C_3 + C_4\theta) \sin \theta + (C_5 + C_6\theta) \cos \theta + \frac{r^4}{EI\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_1 R_2 + 1/\mu}{R_1 R_2 (R_1 R_2 + 1)^2} \gamma_n \xi_n(\theta) \quad (8)$$

式(8)により、境界条件を満足するように $C_1 \sim C_6$ を定めれば円梁の弾性曲線が明らかとなる。あるいは境界条件を満足するとき直交関数系 $\xi_n(\theta)$ (一般に三角関数と双曲線関数の和で与えられる) を用いれば、式(8)の積分定数 $C_1 \sim C_6$ がすべて 0 となり弾性曲線は式(8)のごとく特殊解のみの和で表わされる。

$$w = \frac{r^4}{EI\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_1 R_2 + 1/\mu}{R_1 R_2 (R_1 R_2 + 1)^2} \gamma_n \xi_n(\theta) \quad (8')$$

(2) 円梁の諸変位および諸断面力 円梁のたわみ w と他の諸変位および諸断面力との関係は同知のごとく次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} r\zeta_\alpha &= d\omega/d\theta, & r(1+1/\mu)\zeta_\beta &= \frac{d^2\omega}{d\theta^2} + (2 + \frac{1}{\mu}) \frac{d\omega}{d\theta} - \frac{r^4}{EI\alpha} \zeta_\beta(\theta) \\ \frac{r^3}{EI\alpha} M_\alpha &= -(\frac{d^2\omega}{d\theta^2} - r\zeta_\beta), & \frac{r^3}{EI\alpha} M_\beta &= -\mu(\frac{d\omega}{d\theta} + r \frac{d\zeta_\beta}{d\theta}), & \frac{r^3}{EI\alpha} V_r &= -\frac{d\omega}{d\theta} + \mu \frac{d\omega}{d\theta} + r(1+\mu) \frac{d\zeta_\beta}{d\theta} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

こゝに、 $\zeta_\alpha = \alpha$ 軸まわりの回転角、 $\zeta_\beta = \beta$ 軸まわりの回転角

$M_\alpha = \alpha$ 軸まわりの曲げモーメント、 $M_\beta = \beta$ 軸まわりの捩りモーメント、 $V_r = r$ 軸方向のせん断力

式(9)に式(8)を代入し演算の上整理すれば円梁の諸変位および諸断面力が次のごとく与えられる

$$\left. \begin{aligned} r\zeta_\alpha &= C_1 + (C_3 + C_4\theta) \cos \theta - (C_5 + C_6\theta) \sin \theta + \frac{r^4}{EI\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_1 R_2 + 1/\mu}{R_1 R_2 (R_1 R_2 + 1)^2} \gamma_n \xi_n(\theta) \\ r\zeta_\beta &= -(C_3 + C_4\theta) \sin \theta - (C_5 + C_6\theta) \cos \theta - \frac{2}{1+\mu} (C_4 \sin \theta - C_6 \cos \theta) - (1 + \frac{1}{\mu}) \frac{r^4}{EI\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(R_1 R_2 + 1)^2} \xi_n(\theta) \\ \frac{r^3}{EI\alpha} M_\alpha &= \frac{2\mu}{1+\mu} (-C_4 \cos \theta + C_6 \sin \theta) - \frac{r^4}{EI\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{R_1 R_2 + 1} \xi_n(\theta), & \frac{r^3}{EI\alpha} V_r &= \mu C_2 - \frac{r^4}{EI\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{R_1} \xi_n(\theta) \\ \frac{r^3}{EI\alpha} M_\beta &= -\mu C_1 + \frac{2\mu}{1+\mu} (C_4 \sin \theta + C_6 \cos \theta) + \frac{r^4}{EI\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{R_1 (R_1 R_2 + 1)} \xi_n(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(3) 両端単純支持円梁 式(8)および式(10)は種々の境界条件をもつ円梁について計算可能であるが、特に次節の連続円梁解法の基礎となる両端単純支持円梁の解法を行えば次のとおりである。直交関数系 $\xi_n(\theta)$ とは 2 次の正弦三角関数を用いる。 $\xi_n(\theta) = \sin \theta_n \theta$ (こゝに $\theta_n = n\pi/\theta$)

いかに、式(6)の $\gamma_n(\theta)$ および R_1, R_2 は次のごとく与えられる。 $\gamma_n(\theta) = \cos \theta_n \theta$, $R_1 = \theta_n$, $R_2 = -\theta_n$

また、 $\beta(\theta)$ は式(4)より次のごとく求まる。 $\beta(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin \theta_n \theta$ (こゝに $\gamma_n = \frac{2}{\theta} \int_0^{\theta} \beta(\theta) \sin \theta_n \theta d\theta$)

さて、本題の円梁に関する境界条件は次のとおりである(図-2 参照)

$$\theta = 0, \theta = \theta^* \quad w = 0, \quad M_\alpha = 0, \quad \zeta_\beta = 0 \quad (\text{捩りに対しては図2}) \quad (11)$$

式(11)の $\xi_n(\theta)$ を用いる場合には、式(8)の特殊解の項が式(10)の境界条件を満足する中、積分定数 $C_1 \sim C_6$ はすべて 0 となり、本題の円梁に関する弾性曲線 w は式(8')のごとく与えられる。

また、式(10)より諸変位および諸断面力を求めれば次式のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_\alpha &= \frac{r^3}{EI\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n^2 + 1/\mu}{\theta_n (\theta_n^2 - 1)^2} \gamma_n \cos \theta_n \theta, & \zeta_\beta &= -\frac{r^3}{EI\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 1/\mu}{(\theta_n^2 - 1)^2} \gamma_n \sin \theta_n \theta \\ M_\alpha &= r^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\theta_n^2 - 1} \sin \theta_n \theta, & M_\beta &= r^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\theta_n (\theta_n^2 - 1)} \cos \theta_n \theta, & V_r &= r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\theta_n} \cos \theta_n \theta \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(計算例) 図-3 に示すごとく、スパン中央に集中荷重 P が作用する場合について、各断面のたわみ w 、曲げモーメント M_α および捩りモーメント M_β を計算すれば図-4 に示す結果となる。

3. 連続円梁の解法

1) 解法 図-5 に示すごとく、捩りに対して固定、曲げに對してヒンジの両端 A, B を持つ連続円梁が中間支 $1, 2, \dots, i, \dots, n$ で支えられるものとし、これら中間支には垂直反力のみが生ずるものとする(支 A, B 同様反力捩りモーメントが生ずる場合は後反力曲げモーメントと共に円梁

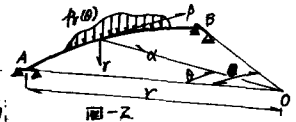


図-2

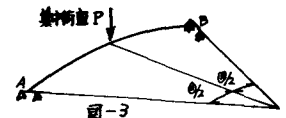


図-3

ラメの解法において報告の予定)。さらに、基線AOに於ける各中間支梁の角度を $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ とする。連続円梁に垂直面荷重 $q(\theta)$ が作用するとき、各中間支梁に生ずる反力を $R_1, R_2, \dots, R_m$ と置けば、これら支梁反力の直交函数系 $\sin n\alpha_n(\theta)$ による展開式は次式で与えられる⁽²⁾。

$$R_i = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\alpha_n \theta \quad (\text{ここに } A_n = -\frac{2R_i}{r\theta_n} \sin n\pi\alpha_n) \quad (17)$$

荷重 $q(\theta)$ と同様に各中間支梁反力を荷重とみなせば、連続円梁は一種の両端単純支持円梁とみなすことができる。これに作用する全荷重 $q(\theta)$ は式(13)と式(17)との総和で与えられる式のとおりである。

$$q(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin n\alpha_n \theta \quad (\text{ここに } r_n = r_n - \frac{2}{r\theta_n} \sum_{i=1}^m R_i \sin n\pi\alpha_i) \quad (18)$$

したがって、連続円梁の弾性曲線 w は式(15)の r_n を式(18)の r_n で置き換えた次式で与えられることになる。

$$w = \frac{r^4}{EI_n} \sum_{n=1}^{\infty} K_n r_n \sin n\alpha_n \theta \quad (\text{ここに } K_n = \frac{\theta_n^2 + 1/r_n}{\theta_n^2 (\theta_n^2 - 1)^2}) \quad (19)$$

同様に、連続円梁の w 以外の諸変位および諸断面力は式(6)において r_n の代りに式(18)の r_n を用いることにより直ちに求まり次の諸式となる。

$$\left. \begin{aligned} z_n &= \frac{r^3}{EI_n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n^2 + 1/r_n}{\theta_n (\theta_n^2 - 1)^2} r_n \cos n\alpha_n \theta \\ z_p &= -\frac{r^3}{EI_n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 1/r_n}{\theta_n^2 (\theta_n^2 - 1)^2} r_n \sin n\alpha_n \theta \\ M_n &= r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{\theta_n^2 - 1} \sin n\alpha_n \theta, \quad M_p = r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{\theta_n (\theta_n^2 - 1)} \cos n\alpha_n \theta \\ T_r &= r \sum_{n=1}^{\infty} (r_n / \theta_n) \cos n\alpha_n \theta \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(19)、(20)において、 R_i が何らかの方法により明らかになれば、連続円梁の諸変位および諸断面力の全てが利用することとなるが、 R_i については次のごとく求められる。すなわち、各中間支梁の垂直変位 $d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_m$ (下向きを正とする)とすれば、式(19)のたわみ w が各中間支梁において $d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_m$ に等しくなければならぬことから、次のごとく一連の変形条件式がえられる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_i D_{in} = \frac{\theta r}{2} (D_i - F d_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (21)$$

ここに、 $D_{in} = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin n\pi\alpha_n \sin n\pi\alpha_i, \quad D_i = \sum_{n=1}^{\infty} K_n r_n \sin n\pi\alpha_i, \quad F = EI_n / r^4$

式(21)は中間支梁 i に於て支梁反力の数と同数の連立方程式となるゆえ、これを解けば未知静定反力であるところの各支梁反力が求まることになる。したがって、図-5に示す連続円梁が解けることになる。すなわち、式(21)における係数 D_{in} は円梁の角度および中間支梁の位置により定まる定数であるからこれを形状定数と称し、また定数項 D_i は与えられた荷重条件より定まるものであるからこれを荷重項と称することとすれば、これら形状定数および荷重項は次のごとく内容をもつ。

D_{in} = 図-5に示す連続円梁から全ての中間支梁を除いた両端単純支持円梁(基本構)の支点に単位集中荷重 P が加わるとき、基本構の支点が P の方向に起す変位 d_i を EI_n で倍したものである。
 D_i = 基本構に求めらるる D_{in} の荷重状態と同じ荷重が加わるとき、基本構の支点が下向きに起す変位 d_i を F 倍したものである。

(2) 計算例 図-6に示すごとく、5径間連続円梁に集中荷重 P が作用する場合の解法を本せ

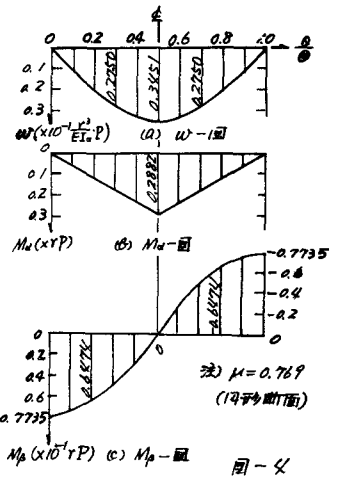
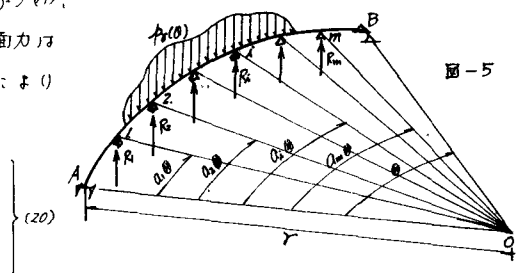
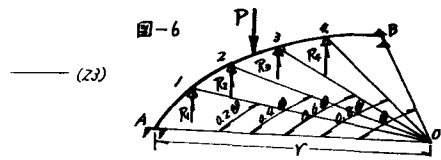


図-5



ば次のとおりである。いま、各中間支突の垂直変位を1とする0とすれば、式(21)の連立方程式は次の内容となる。

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \frac{\theta Y}{2} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} \quad (22)$$



連続四梁の扇角を $\theta = \pi/3$ とし、また $\mu = 0.6$

とする。式(23)の各種状定数 D_{ik} および荷重

項 D_k を表一に示す諸値となり、これを用

いて式(22)の連立方程式を解けば、中間支

定反力 $R_1 \sim R_4$ が次のごとく求まる。

i \ k	形 状 定 数 D_{ik}				荷 重 項 D_k ($\times P$)
	1	2	3	4	
1	.73451m ⁻²	.10708m ⁻¹	.98152m ⁻²	.57819m ⁻²	.20506m ⁻¹
2	.10708m ⁻¹	.7160m ⁻¹	.16460m ⁻¹	.98152m ⁻²	.33905m ⁻¹
3	.98152m ⁻²	.16460m ⁻¹	.17160m ⁻¹	.10708m ⁻¹	.33905m ⁻¹
4	.57819m ⁻²	.98152m ⁻²	.10708m ⁻¹	.73451m ⁻²	.20506m ⁻¹

表一 D_{ik} および D_k の値

$$R_1 = R_4 = -0.11951 P, \quad R_2 = R_3 = 0.59944 P \quad (24)$$

式(25)を式(18)の16式に代入し、その結果を式(19)、(20)に代入すれば連続四梁の各断面における諸変位および諸断面力が求まることとなるが、特にたわみ w についての示せば次式のとおりである。

$$w = \frac{\theta Y P}{\pi E I \pi} \sum_{n=0}^{\infty} K_n \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} + 0.11951 (\sin 0.2n\pi + \sin 0.8n\pi) - 0.59944 (\sin 0.4n\pi + \sin 0.6n\pi) \right\} \sin 3n\theta \quad (25)$$

の各値について式(25)を計算すれば図-7に示す結果となる。

4. 結語

無限級数式によって四梁および連続四梁を解く

本法は、本来の目的としてはいちにも述べることく

、四梁と扇形板とで構成される構造物の解析手法

の基礎として展開したものであるが、本論文の題目としてかゝる連続四梁の解法に限定して径径の代数函数による四梁理論と比較すれば次のごとき特徴を利便として認める。

(1) 本法にしたがえば、連続四梁を解くことには式(21)の多変数連立方程式を解くだけの簡単な内容となり、先に著者らが発表⁹⁾した直線部材からなる連続ばりの場合に比較して構造的に複雑であるにもかかわらず、その計算労力は全く同一である。

(2) 径径のたわみ曲線法では各節点の変位を媒介として、予解定力である各中間支突反力を算出せねばならぬが、本法は中間支突反力を直接求める。

(3) この応用とあらうが、連続四梁上の任意点におけるたわみは式(19)によらず式(21)より簡単に求めることができる。

(4) 本法の応用拡張により連続四梁の各種影響線も簡単に求めることができ、しかも影響線と一つの数式にて表わしうる要極の便利である。

本研究には文部省科学研究費の補助を受けた。記して謝意を表す。

文献 (1) 岡本齊三、軸線を含む面に垂直なる荷重を受ける円形曲り梁の研究、土木学会誌、第29巻第3号、昭和19年3月

(2) 山崎徳次、橋本武、フーリエ級数による連続ばりおよびラメンの解法、九州大学工学部第3巻第3号、昭和4年10月。