

等方性斜板の振動解析

九州大学 正 員 山崎徳也

〃 正 員 房坂 照

〃 学生員 〇古川恒雄

1. 緒言

斜板の自由振動に関する既往研究には、階差法による成岡¹⁾とMatrix Displacement MethodによるJH. Argyris²⁾のものがあるが、本論文はこれらとは異り、斜交座標表示されたたわみ w の級数解を基にして、任意周辺支持条件をもつ等方性斜板の固有周期ならびに振動モードの算定法を述べたもので、本文中に定義された斜角 φ を $\varphi=0$ と置くことにより、広く矩形板の振動をも包含するものである。

2. 振動の基礎微分方程式

図-1のごとく二辺の長さが a, b の平行四辺形板を考え、これら二辺に沿って斜交座標 $O-x'y'$ を、また原点を共有する直交座標 $O-\bar{x}\bar{y}$ 、および $O-x''y''$ をそれぞれ定めれば、これら各座標間には次の関係式が成立する。

$$x = \bar{x} - \bar{y} \tan \varphi, \quad y = \bar{y} \sec \varphi, \quad (1)$$

$$x = x' \sec \varphi, \quad y = y' - x' \tan \varphi, \quad (2)$$

等方性板の面に垂直なたわみを w で表わせば、振動の微分方程式は周知の如く次式であらわされる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{y}^4} + \frac{\rho A}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

ただし D : 板剛度, ρ : 板厚, ρ : 板の密度

ここで式(1)の変換により式(3)の左辺を斜交座標表示し、 $\sin \varphi = S_0$, $\cos \varphi = C_0$ とおけば、次式が得られる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x'^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y'^4} + 2(1 + 2S_0^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} - 4S_0 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x'^3 \partial y'} + \frac{\partial^4 w}{\partial x' \partial y'^3} \right) + C_0^4 \frac{\rho A}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

3. 境界条件の斜交座標表示

図-1において、 x'' 軸および y'' 軸に垂直な断面に作用する曲げモーメント、捩りモーメント、せん断力をそれぞれ $M_{x'}$, $M_{x'y'}$, $Q_{x'}$ および $M_{y'}$, $M_{y'x'}$, $Q_{y'}$ とすれば、これらは式(1)および式(2)の変換により、それぞれ次の如く斜交座標表示される。

$$\left. \begin{aligned} M_{x'} &= -\frac{D}{C_0^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} - 2S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x' \partial y'} + (S_0^2 + D_0 C_0^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} \right] \\ M_{y'} &= -\frac{D}{C_0^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} - 2S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y' \partial x'} + (S_0^2 + D_0 C_0^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} \right] \\ M_{x'y'} &= M_{y'x'} = \frac{D}{C_0} (1 - D_0) \left[-S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x' \partial y'} \right] \\ Q_{x'} &= -\frac{D}{C_0^2} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x'^3} - 3S_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x'^2 \partial y'} + (1 + 2S_0^2) \frac{\partial^3 w}{\partial x' \partial y'^2} - S_0 \frac{\partial^3 w}{\partial y'^3} \right] \\ Q_{y'} &= -\frac{D}{C_0^2} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y'^3} - 3S_0 \frac{\partial^3 w}{\partial y'^2 \partial x'} + (1 + 2S_0^2) \frac{\partial^3 w}{\partial y' \partial x'^2} - S_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x'^3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

この代表的境界条件として i) 四辺固定、ii) 四辺単純支持、iii) 一対辺 ($x=0, a$) 単純支持、他対辺 ($y=0, b$) 自由、iv) 一対辺 ($x=0, a$) 単純支持、他対辺 ($y=0, b$) 弾性梁支持、を取り上げ それぞれの境界条件を斜交座標表示すれば 次のごとくである。

i) 四辺固定

$$\left. \begin{aligned} (W)_{x=0,a} &= (W)_{y=0,b} = 0 \\ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=0,a} &= \frac{1}{C_x} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - S_x \frac{\partial W}{\partial y} \right)_{x=0,a} = 0 \\ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{y=0,b} &= \frac{1}{C_y} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - S_y \frac{\partial W}{\partial x} \right)_{y=0,b} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ii) 四辺単純支持

$$\left. \begin{aligned} (W)_{x=0,a} &= (W)_{y=0,b} = 0 \\ (M_x)_{x=0,a} &= -D_x \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (S_x^2 + \nu C_x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2S_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right]_{x=0,a} = 0 \\ (M_y)_{y=0,b} &= -D_y \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + (S_y^2 + \nu C_y^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2S_y \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right]_{y=0,b} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ただし ν はポアソン比

iii) 一対辺単純支持、他対辺自由

$$\left. \begin{aligned} (W)_{x=0,a} &= 0 \\ (M_x)_{x=0,a} &= -D_x \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (S_x^2 + \nu C_x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2S_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right]_{x=0,a} = 0 \\ (M_y)_{y=0,b} &= -D_y \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + (S_y^2 + \nu C_y^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2S_y \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right]_{y=0,b} = 0 \\ (V_y)_{y=0,b} &= -D_y \left[\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + 3S_y \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y^2} + (3S_y^2 + (2-\nu)C_y^2) \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x^2} - \{S_y^2 + (2-\nu)S_y C_y^2\} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]_{y=0,b} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

iv) 一対辺単純支持、他対辺弾性梁支持 (EI: 曲げ剛性, C: 捩り剛性)

$$\left. \begin{aligned} (W)_{x=0,a} &= 0 \\ (M_x)_{x=0,a} &= -D_x \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (S_x^2 + \nu C_x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2S_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right]_{x=0,a} = 0 \\ EI \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{y=0,b} &= \frac{D_x}{C_x} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 3S_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + (3S_x^2 + (2-\nu)C_x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial y} - \{S_x^2 + (2-\nu)S_x C_x^2\} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]_{y=0,b} \\ C \left(S_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=0,b} &= \frac{D_x}{C_x} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2S_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + (S_x^2 + \nu C_x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]_{y=0,b} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

4 振動数方程式の誘導

斜板の固有振動数と ω とし式(4)の基礎微分方程式を満足する W が次式であらわされるものとする。

$$W = W(x, y) \cos \omega t \quad (10)$$

式(10)を式(4)に代入し両辺を $\cos \omega t$ で割れば x, y のみに関する次の微分方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1 + 2S_x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial y^2} - 4S_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) - C_x^2 \omega^2 \frac{C_x}{D} W = 0 \quad (11)$$

式(11)を満足する W の解は次式で得られる。

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} (A_{1n} \cosh \pi \beta_1 \xi + A_{2n} \sinh \pi \beta_1 \xi + A_{3n} \cosh \pi \beta_2 \xi + A_{4n} \sinh \pi \beta_2 \xi) \cos \pi \eta \left(S_0 \frac{a}{b} \xi + \eta \right) + \sum_{m=1}^{\infty} (B_{1m} \cosh \pi \delta_1 \eta + B_{2m} \sinh \pi \delta_1 \eta + B_{3m} \cosh \pi \delta_2 \eta + B_{4m} \sinh \pi \delta_2 \eta) \cos \pi \eta \left(S_0 \frac{c}{a} \eta + \xi \right) \quad (12)$$

ただし $A_{1n}, A_{2n}, A_{3n}, A_{4n}, B_{1m}, B_{2m}, B_{3m}, B_{4m}$ は境界条件から定まる積分定数である。

また式(12)の記号は次の如き内容をもつ。

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b} \\ \beta_1 &= \frac{a}{b} \sqrt{n^2 + \frac{b^2}{\pi^2} \omega^2 \sqrt{\frac{D}{E}}}, \quad \beta_2 = \frac{a}{b} \sqrt{n^2 - \frac{b^2}{\pi^2} \omega^2 \sqrt{\frac{D}{E}}} \times C_0 \\ \delta_1 &= \frac{c}{a} \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{\pi^2} \omega^2 \sqrt{\frac{D}{E}}} \times C_0, \quad \delta_2 = \frac{c}{a} \sqrt{m^2 - \frac{a^2}{\pi^2} \omega^2 \sqrt{\frac{D}{E}}} \times C_0 \end{aligned}$$

周辺支持条件は前節の i), ii), iii), iv) のごとく斜板の中心点 $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ に関して点対称な場合は式(12)は中心点 $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ に関する対称および逆対称振動に対応して2式に分離することゝできる。すなわち

(i) 対称振動

$$W(\xi, \eta) = W(1-\xi, 1-\eta), \text{ の条件から}$$

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} [A_{1k} \cosh \pi \beta_1 (\xi - \frac{1}{2}) + A_{2k} \cosh \pi \beta_2 (\xi - \frac{1}{2})] \cos \pi \pi \{S_0 \frac{q}{2} (\xi - \frac{1}{2}) + \eta - \frac{1}{2}\} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} [B_{1m} \cosh \pi \delta_1 (\eta - \frac{1}{2}) + B_{2m} \cosh \pi \delta_2 (\eta - \frac{1}{2})] \cos \pi \pi \{S_0 \frac{q}{2} (\eta - \frac{1}{2}) + \xi - \frac{1}{2}\} \quad (13)$$

(2) 逆対称振動

$W(\xi, \eta) = -W(1-\xi, 1-\eta)$ の条件から

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} [A_{1k} \sinh \pi \beta_1 (\xi - \frac{1}{2}) + A_{2k} \sinh \pi \beta_2 (\xi - \frac{1}{2})] \cos \pi \pi \{S_0 \frac{q}{2} (\xi - \frac{1}{2}) + \eta - \frac{1}{2}\} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} [B_{1m} \sinh \pi \delta_1 (\eta - \frac{1}{2}) + B_{2m} \sinh \pi \delta_2 (\eta - \frac{1}{2})] \cos \pi \pi \{S_0 \frac{q}{2} (\eta - \frac{1}{2}) + \xi - \frac{1}{2}\} \quad (14)$$

任意の周辺支持条件をもつ斜板について $x=0, a$, $y=0, b$ の各辺につき 2 個、合計 8 個の境界条件式が成立し、これら各式に式(12)を代入すれば、一般に次の 8 個の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} [A_{1k} f_{1k}(y) + A_{2k} f_{2k}(y) + A_{3k} f_{3k}(y) + A_{4k} f_{4k}(y)] + \sum_{m=1}^{\infty} [B_{1m} g_{1m}(x) + B_{2m} g_{2m}(x) + B_{3m} g_{3m}(x) + B_{4m} g_{4m}(x)] &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} [A_{1k} f_{1k}(y) + A_{2k} f_{2k}(y) + A_{3k} f_{3k}(y) + A_{4k} f_{4k}(y)] + \sum_{m=1}^{\infty} [B_{1m} g_{1m}(x) + B_{2m} g_{2m}(x) + B_{3m} g_{3m}(x) + B_{4m} g_{4m}(x)] &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} [A_{1k} f_{1k}(x) + A_{2k} f_{2k}(x) + A_{3k} f_{3k}(x) + A_{4k} f_{4k}(x)] + \sum_{m=1}^{\infty} [B_{1m} g_{1m}(x) + B_{2m} g_{2m}(x) + B_{3m} g_{3m}(x) + B_{4m} g_{4m}(x)] &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} [A_{1k} f_{1k}(x) + A_{2k} f_{2k}(x) + A_{3k} f_{3k}(x) + A_{4k} f_{4k}(x)] + \sum_{m=1}^{\infty} [B_{1m} g_{1m}(x) + B_{2m} g_{2m}(x) + B_{3m} g_{3m}(x) + B_{4m} g_{4m}(x)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここに $f(x)$, $g(x)$ および $f(y)$, $g(y)$ はそれぞれ x , y のみの函数である。

式(15)の第一式から第四式までは辺 $x=0, a$ に関する、また第五式から第八式までは辺 $y=0, b$ に関する境界条件に由来する諸式で、前者は全ての y について、また後者は全ての x について成立せねばならない。よって式(15)の各式をフーリエ正弦級数 $\sum_k P_k \sin \frac{k\pi}{b} y$ 、または $\sum_m Q_m \sin \frac{m\pi}{a} x$ に展開すれば、各展開係数 P_k , Q_m はすべて 0 でなければならず、未知数 $A_{1k}, A_{2k}, A_{3k}, A_{4k}$ ($k=1, 2, 3, \dots, N$) および $B_{1m}, B_{2m}, B_{3m}, B_{4m}$ ($m=1, 2, 3, \dots, M$) に関する次の $4(M+N)$ 元連立一次方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^N [\lambda_{1k} A_{1k} + \lambda_{1,N+k} A_{2k} + \lambda_{2k} A_{3k} + \lambda_{1,2k+1} A_{4k}] + \sum_{m=1}^M [\mu_{1m} B_{1m} + \mu_{1,M+m} B_{2m} + \mu_{1,2M+m} B_{3m} + \mu_{1,3M+m} B_{4m}] &= 0 \\ \sum_{k=1}^N [\lambda_{2k} A_{1k} + \lambda_{2,N+k} A_{2k} + \lambda_{2k} A_{3k} + \lambda_{2,2k+1} A_{4k}] + \sum_{m=1}^M [\mu_{2m} B_{1m} + \mu_{2,M+m} B_{2m} + \mu_{2,2M+m} B_{3m} + \mu_{2,3M+m} B_{4m}] &= 0 \\ \sum_{k=1}^N [\lambda_{3k} A_{1k} + \lambda_{3,N+k} A_{2k} + \lambda_{3k} A_{3k} + \lambda_{3,2k+1} A_{4k}] + \sum_{m=1}^M [\mu_{3m} B_{1m} + \mu_{3,M+m} B_{2m} + \mu_{3,2M+m} B_{3m} + \mu_{3,3M+m} B_{4m}] &= 0 \\ \sum_{k=1}^N [\lambda_{4k} A_{1k} + \lambda_{4,N+k} A_{2k} + \lambda_{4k} A_{3k} + \lambda_{4,2k+1} A_{4k}] + \sum_{m=1}^M [\mu_{4m} B_{1m} + \mu_{4,M+m} B_{2m} + \mu_{4,2M+m} B_{3m} + \mu_{4,3M+m} B_{4m}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

振動数方程式は、連立一次同次方程式(16)の 0 以外の根をもつ条件から λ , μ の係数行列式 = 0 より得られ、これを満足する ω が求める固有¹⁾振動数である。

5. 振動モード

任意の固有値に対応する斜板の固有振動は式(14)を満足する式(10)によって決定されるが、特定の時刻における振動モードは式(12)より求められ、そのためには積分定数 $A_{1k}, A_{2k}, A_{3k}, A_{4k}$ および $B_{1m}, B_{2m}, B_{3m}, B_{4m}$ の相互の比を求める必要がある。式(16)の任意の一式は残りの $(4M+4N-1)$ 個の式の一次結合によって表わされるゆえ、式(16)において $A_{11}=1$ とおき、任意の一式を除いて得られる $(4M+4N-1)$ 元連立一次方程式を解けば、未知数 A_{1k} ($k=2, 3, 4, \dots, N$), A_{2k}, A_{3k}, A_{4k} ($k=1, 2, 3, \dots, N$) および $B_{1m}, B_{2m}, B_{3m}, B_{4m}$ ($m=1, 2, 3, \dots, M$) の A_{11} に対する比が求められる。

6 計算例

四辺が固定された斜板の一次固有振動についての数値計算の一例を示す。境界条件の対称性を考慮して式(9)を用いれば、この場合式(14)は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^N (\lambda_{2n} A_{1n} + \lambda_{1, N+2n} A_{2n}) + \sum_{m=1}^M (\mu_{1m} B_{1m} + \mu_{1, M+m} B_{2m}) &= 0 \\ \sum_{n=1}^N (\lambda_{2N+2n} A_{1n} + \lambda_{2N, N+2n} A_{2n}) + \sum_{m=1}^M (\mu_{2N+2m} B_{1m} + \mu_{2N, M+m} B_{2m}) &= 0 \\ \sum_{n=1}^N (\lambda_{2N+2M, n} A_{1n} + \lambda_{2N+M, N+2n} A_{2n}) + \sum_{m=1}^M (\mu_{2N+2M, m} B_{1m} + \mu_{2N+M, M+m} B_{2m}) &= 0 \\ \sum_{n=1}^N (\lambda_{2N+2M, n} A_{1n} + \lambda_{2N+2M, N+2n} A_{2n}) + \sum_{m=1}^M (\mu_{2N+2M, m} B_{1m} + \mu_{2N+2M, M+m} B_{2m}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

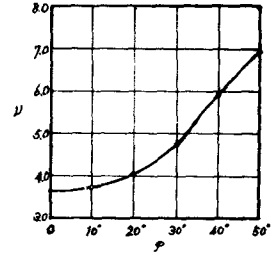


図-2

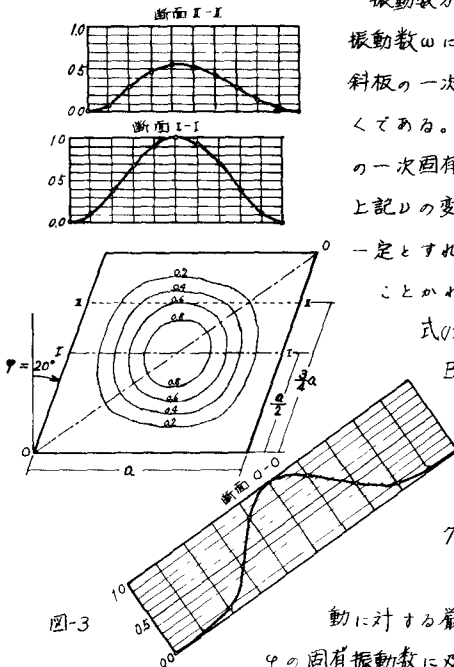


図-3

振動数方程式は式(17)の係数行列式=0として得られる。固有振動数 ω に対して $\nu = \omega \frac{a^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho R}{D}}$ なる量を導入し、 $\frac{a}{b}=1$ の四辺固定斜板の一次固有円振動数に対する斜角の影響を示せば以下のごとくである。まず $\varphi=0$ とすれば $\nu=3.645$ となり四辺固定正方形板の一次固有円振動数に関する既往の研究⁽³⁾と一致する。図-2は上記 ν の変化を φ が $0 \sim 50^\circ$ の範囲でプロットしたもので、 $a=b$ を一定とすれば、斜板の振動数は φ の増加とともに急激に増加することわかる。次に $\varphi=20^\circ$ の場合の固有値 $\nu=4.042$ を用いて式(17)の諸係数を計算し、 $A_0=1$ に対する残りの未知数 $A_{1n}, A_{2n}, B_{1m}, B_{2m}$ の比を決定したうえ、これらを式(9)に代入すれば、任意点 (x, y) のため、すなわち振動モードの図-3のごとく求められる。

7. 結語

本論文は任意周辺支持条件を持つ等方性斜板の自由振動に対する厳密理論解法を提示したうえ、簡単な数値計算例で斜角 φ の固有振動数に及ぼす効果を吟味したものである。固有振動数算定のための式(17)の振動数方程式および振動モード算定のための多元連立一次方程式の計算はいずれも手計算ではほとんど不可能であるが、電子計算機の普及により、予め用意された行列式および多元連立一次方程式のサブルーチンを利用して手軽に解き得ることとなった。なお本法は鉄筋コンクリートを対象とする異方性スラブの自由振動ならびに強制振動の解析に拡張応用が可能であり、これらについても逐次報告する予定である。

文献 1) 成岡大村西島：直交異方性平行四辺形板に対する階差方程式。土木学会論文集 第55号 昭和33年5月

2) J.H. Argyris: Matrix Displacement Analysis of Plates and Shells. Ingenieur-Archiv XXXV Band 1966

3) Shokugei: Die Eigenwertprobleme für die elastische rechteckige Platte 北海道大学工学部紀要 第44期 昭和11~13年