

地中構造物に対する地盤の仮想質量について

九州大学 助教授

小坪清真

同

大学院学生 ○花田和史

1. まえがき

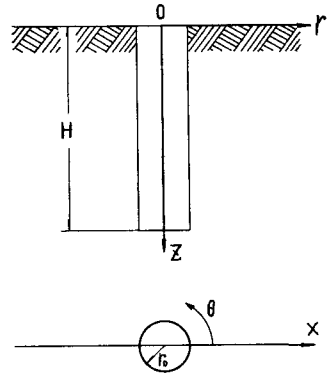
地中構造物が地震により振動を生ずれば、構造物に接しているまわりの基礎地盤は、構造物の振動に従って振動を生じる。この時、地盤が構造物に及ぼす反力には、構造物の変位に比例する静的地盤反力のみならず、振動する地盤の慣性力が作用する。この慣性力は、構造物自身の慣性力と同一位相であるために、あたかも土の一部が構造物に附着しているかのごとき現象を呈する。この仮想質量の大きさは、構造物の形状によって異なるものであるが、これを求めることは、構造物の地震に対する応答を計算する上に、きわめて重要なことである。

本論は、軟弱地盤に打ちこまれた円形杭が振動する場合の杭に附着する仮想質量について、理論的考察を試みたものである。

2. 地盤に関する基礎方程式とその解

円筒座標 (r, θ, z) を図-1 のように設け、 r, θ 方向の水平変位を u, v とする。地盤に対して均質弾性体の波動方程式を適用すれば、次のようになる。

図-1



$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} + 2\mu \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - 2\mu \frac{\partial w_r}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial w_z}{\partial r} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ 2w_r &= -\frac{\partial v}{\partial z} \\ 2w_\theta &= \frac{\partial u}{\partial z} \\ 2w_z &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 λ, μ は Lamé の定数、 ρ は密度を表わす。(1), (2) 式に (3) 式を代入し、 Δ および、Rotation を消去後、

$$u = U(r) \cos \theta \cos \frac{\pi z}{2H} e^{i\omega t} \quad (4)$$

$$v = V(r) \sin \theta \cos \frac{\pi z}{2H} e^{i\omega t} \quad (5)$$

と置けば、 $U(r), V(r)$ は次式で表わされる。

$$\S \omega^2 \bar{U}(r) = (\lambda + 3\mu) \frac{\bar{U}(r) + \nabla(r)}{r^2} - (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}(r)}{\partial r} - (\lambda + 2\mu) \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{U}(r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{U}(r)}{\partial r^2} \right\} + \mu \left(\frac{n\pi}{2H} \right)^2 \bar{U}(r) \quad (6)$$

$$\S \omega^2 \bar{V}(r) = (\lambda + 3\mu) \frac{\bar{U}(r) + \nabla(r)}{r^2} + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{U}(r)}{\partial r} - \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}(r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{V}(r)}{\partial r^2} \right\} + \mu \left(\frac{n\pi}{2H} \right)^2 \bar{V}(r) \quad (7)$$

(6), (7) 式において、 $\bar{U}_p(r) = -\partial(\bar{V}_p(r)r)/\partial r$ とおくと

$$\frac{d^2 \bar{V}_p(r)}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\bar{V}_p(r)}{dr} + \frac{\S \omega^2 - \mu(n\pi/2H)^2}{\lambda + 2\mu} \bar{V}_p(r) = 0 \quad (8)$$

(6), (7) 式において、 $\bar{V}_s(r) = -\partial(\bar{U}_s(r)r)/\partial r$ とおくと

$$\frac{d^2 \bar{U}_s(r)}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\bar{U}_s(r)}{dr} + \frac{\S \omega^2 - \mu(n\pi/2H)^2}{\mu} \bar{U}_s(r) = 0 \quad (9)$$

(8) (9) 式はそれぞれ一次の Bessel 函数の微分方程式に帰着される。

(8) 式の解は i) $\S \omega^2 > \mu(n\pi/2H)^2$ の場合、 $k_p = \sqrt{\frac{\S \omega^2 - \mu(n\pi/2H)^2}{\lambda + 2\mu}}$ (10) とおいて

$$\bar{U}_p(r) = -A_n \frac{\partial H_1^{(0)}(k_p r)}{\partial r} - A'_n \frac{\partial H_1^{(0)}(k_p r)}{\partial r} \quad (11)$$

$$\bar{V}_p(r) = A_n \frac{H_1^{(0)}(k_p r)}{r} + A'_n \frac{H_1^{(0)}(k_p r)}{r} \quad (12)$$

ii) $\S \omega^2 < \mu(n\pi/2H)^2$ の場合、 $k'_p = \sqrt{\frac{\mu(n\pi/2H)^2 - \S \omega^2}{\lambda + 2\mu}}$ (13) とおいて

$$\bar{U}_p(r) = -C_n \frac{\partial K_1(k'_p r)}{\partial r} - C'_n \frac{\partial I_1(k'_p r)}{\partial r} \quad (14)$$

$$\bar{V}_p(r) = C_n \frac{K_1(k'_p r)}{r} + C'_n \frac{I_1(k'_p r)}{r} \quad (15)$$

(9) 式の解は i) $\S \omega^2 > \mu(n\pi/2H)^2$ の場合、 $k_s = \sqrt{\frac{\S \omega^2 - \mu(n\pi/2H)^2}{\mu}}$ (16) とおいて

$$\bar{U}_s(r) = B_n \frac{H_1^{(0)}(k_s r)}{r} + B'_n \frac{H_1^{(0)}(k_s r)}{r} \quad (17)$$

$$\bar{V}_s(r) = -B_n \frac{\partial H_1^{(0)}(k_s r)}{\partial r} - B'_n \frac{\partial H_1^{(0)}(k_s r)}{\partial r} \quad (18)$$

ii) $\S \omega^2 < \mu(n\pi/2H)^2$ の場合、 $k'_s = \sqrt{\frac{\mu(n\pi/2H)^2 - \S \omega^2}{\mu}}$ (19) とおいて

$$\bar{U}_s(r) = D_n \frac{K_1(k'_s r)}{r} + D'_n \frac{I_1(k'_s r)}{r} \quad (20)$$

$$K_s(r) = -D_n \frac{\partial K_1(k'_s r)}{\partial r} - D'_n \frac{\partial I_1(k'_s r)}{\partial r} \quad (21)$$

ここに、 $H_1^{(0)}$ 、 $H_1^{(0)}$ は Hankel の函数、 I_1 、 K_1 は変形 Bessel 函数である。上記の解のうち、後進波の項である $H_1^{(0)}$ 、および $r \rightarrow \infty$ の時、無限大となる解 I_1 を除き、 $\bar{U}(r)$ 、 $\bar{V}(r)$ をそれぞれ、重ね合わせる、 u 、 v は次式で表わされる。

$$u = \sum_{n=1}^m \left\{ -A_n \frac{\partial H_1^{(0)}(k_p r)}{\partial r} + B_n \frac{H_1^{(0)}(k_s r)}{r} \right\} e^{i\omega t} \cos \theta \cos \frac{n\pi z}{2H} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left\{ -C_n \frac{\partial K_1(k'_p r)}{\partial r} + D_n \frac{K_1(k'_s r)}{r} \right\} e^{i\omega t} \cos \theta \cos \frac{n\pi z}{2H} \quad (22)$$

$$v = \sum_{n=1}^m \left\{ A_n \frac{H_1^{(0)}(k_p r)}{r} - B_n \frac{\partial H_1^{(0)}(k_s r)}{\partial r} \right\} e^{i\omega t} \sin \theta \cos \frac{n\pi z}{2H} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left\{ C_n \frac{K_1(k'_p r)}{r} - D_n \frac{\partial K_1(k'_s r)}{\partial r} \right\} e^{i\omega t} \sin \theta \cos \frac{n\pi z}{2H} \quad (23)$$

m は、 $3\omega^2 > \mu (n\pi/2H)^2$ を満足する最大の n である。なお各中括弧内の二項のうち、オニ項は疎密波による変位、オニ項はせん断波による変位、また $2\pi/\lambda$ は、その波の一波長を示している。

今、杭が X 軸方向に振動する時、

水平方向変位は *Fourier* 展開によ

$$y = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \delta_n \cos \frac{n\pi z}{2H} \quad (24)$$

で表わされる。但し、 δ_n は *Fourier* 係数。従って、杭表面での u, v を、 u_0, v_0 とすると、境界条件式として次の式が成立する。

$$u_0(r=r_0, \theta, z, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \delta_n \cos \frac{n\pi z}{2H} \cos \theta e^{i\omega t} \quad (25)$$

$$v_0(r=r_0, \theta, z, t) = -\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \delta_n \cos \frac{n\pi z}{2H} \sin \theta e^{i\omega t} \quad (26)$$

(25)(26) 式の境界条件を用いて (22)(23)式の係数を決定し、その実数部を採ると、次式を得る。

$$u = \sum_{n=1,3,5,\dots}^m E_n \cos \theta \left[\begin{aligned} & \left\{ \left\{ Z_R J_2(R_3 r_0) + Z_I Y_2(R_3 r_0) \right\} \left\{ J_0(R_p r) - J_2(R_p r) \right\} + \left\{ Z_I J_2(R_3 r_0) - Z_R Y_2(R_3 r_0) \right\} \left\{ Y_0(R_p r) - Y_2(R_p r) \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ Z_R J_2(R_p r_0) + Z_I Y_2(R_p r_0) \right\} \left\{ J_0(R_3 r) - J_2(R_3 r) \right\} + \left\{ Z_I J_2(R_p r_0) - Z_R Y_2(R_p r_0) \right\} \left\{ Y_0(R_3 r) - Y_2(R_3 r) \right\} \right\} \cos \omega t \\ & + \left\{ \left\{ Z_I J_2(R_3 r_0) + Z_I Y_2(R_3 r_0) \right\} \left\{ Y_0(R_p r) + Y_2(R_p r) \right\} - \left\{ Z_I J_2(R_3 r_0) - Z_R Y_2(R_3 r_0) \right\} \left\{ J_0(R_p r) + J_2(R_p r) \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ Z_R J_2(R_p r_0) + Z_I Y_2(R_p r_0) \right\} \left\{ Y_0(R_3 r) + Y_2(R_3 r) \right\} - \left\{ Z_I J_2(R_p r_0) - Z_I Y_2(R_p r_0) \right\} \left\{ J_0(R_3 r) + J_2(R_3 r) \right\} \right\} \sin \omega t \end{aligned} \right] \quad (27)$$

$$+ \sum_{n=m+1}^{\infty} F_n \cos \theta \left[K_2(R_3' r_0) \left\{ K_0(R_p' r) + K_2(R_p' r) \right\} + K_2(R_p' r_0) \left\{ K_0(R_3' r) - K_2(R_3' r) \right\} \right] \cos \omega t$$

$$v = -\sum_{n=1,3,5,\dots}^m E_n \sin \theta \left[\begin{aligned} & \left\{ \left\{ Z_R J_2(R_3 r_0) + Z_I Y_2(R_3 r_0) \right\} \left\{ J_0(R_p r) + J_2(R_p r) \right\} + \left\{ Z_I J_2(R_3 r_0) - Z_R Y_2(R_3 r_0) \right\} \left\{ Y_0(R_p r) + Y_2(R_p r) \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ Z_R J_2(R_p r_0) + Z_I Y_2(R_p r_0) \right\} \left\{ J_0(R_3 r) + J_2(R_3 r) \right\} + \left\{ Z_I J_2(R_p r_0) - Z_R Y_2(R_p r_0) \right\} \left\{ Y_0(R_3 r) + Y_2(R_3 r) \right\} \right\} \cos \omega t \\ & + \left\{ \left\{ Z_R J_2(R_3 r_0) + Z_I Y_2(R_3 r_0) \right\} \left\{ Y_0(R_p r) - Y_2(R_p r) \right\} - \left\{ Z_I J_2(R_3 r_0) - Z_R Y_2(R_3 r_0) \right\} \left\{ J_0(R_p r) - J_2(R_p r) \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ Z_R J_2(R_p r_0) + Z_I Y_2(R_p r_0) \right\} \left\{ Y_0(R_3 r) - Y_2(R_3 r) \right\} - \left\{ Z_I J_2(R_p r_0) - Z_R Y_2(R_p r_0) \right\} \left\{ J_0(R_3 r) - J_2(R_3 r) \right\} \right\} \sin \omega t \end{aligned} \right] \quad (28)$$

$$- \sum_{n=1,3,5,\dots}^m F_n \sin \theta \left[K_2(R_3' r_0) \left\{ K_0(R_p' r) - K_2(R_p' r) \right\} + K_2(R_p' r_0) \left\{ K_0(R_3' r) + K_2(R_3' r) \right\} \right] \cos \omega t$$

$$E_n = \frac{\delta_n}{Z_R^2 + Z_I^2} \cos \frac{n\pi z}{2H}, \quad F_n = \frac{\delta_n \cos \frac{n\pi z}{2H}}{K_0(R_p' r_0) K_2(R_3' r_0) + K_2(R_p' r_0) K_0(R_3' r_0)} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_R &= J_0(R_p r_0) J_2(R_3 r_0) + J_2(R_p r_0) J_0(R_3 r_0) - Y_0(R_p r_0) Y_2(R_3 r_0) - Y_0(R_3 r_0) Y_2(R_p r_0) \\ Z_I &= J_0(R_p r_0) Y_2(R_3 r_0) + J_0(R_3 r_0) Y_2(R_p r_0) + J_2(R_p r_0) Y_0(R_3 r_0) + Y_0(R_p r_0) J_2(R_3 r_0) \end{aligned} \right\}$$

3. 地盤反力

(27)(28)(29)式で得た u, v を、 $u = f(r, t, z) \cos \theta, v = g(r, t, z) \sin \theta$ の形で考えると、地盤内の応力は $\sigma_r = \frac{E \cos \theta}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\nu}{r} (f+g) \right\}, \tau_{r\theta} = G \sin \theta \left\{ \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{f+g}{r} \right\}$

杭表面での境界条件 $f+g=0$ を上式に代入すると、

$$\sigma_{r0} = \frac{E \cos \theta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_{r=r_0} \quad (30) \quad \tau_{r0} = G \sin \theta \left(\frac{\partial g}{\partial r} \right)_{r=r_0} \quad (31)$$

従って単位深さあたりの地盤反力は、 $P = \frac{E r_0 \pi}{1-\nu^2} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_{r=r_0} - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial r} \right)_{r=r_0} \right\} \quad (32)$

但し、 E ; 弾性係数 G ; せん断弾性係数 ν ; Poisson 比

4. 数値計算結果

$E = 100 \text{ Kg/cm}^2, \nu = 1/4, r_0 = 50 \text{ cm}$ とし数値解を求めた。簡単のため、杭変形は、 $y = \cos(\pi z/2H)$ と仮定した。

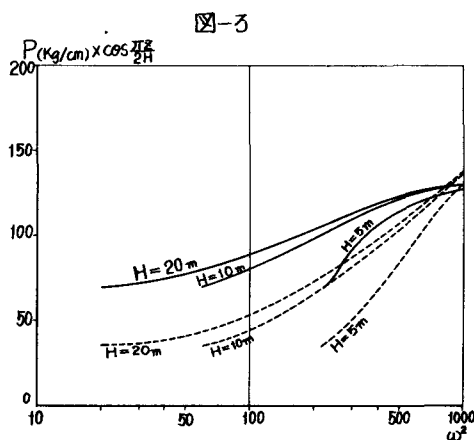
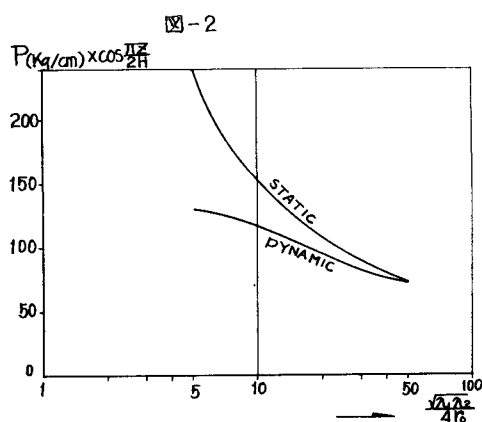


図-2 では、疎密波波長を $\lambda_p (= 2\pi/\kappa_p)$ 、せん断波波長を $\lambda_s (= 2\pi/\kappa_s)$ で表わしている。杭に反力を与える地盤の影響範囲を $\lambda/4$ と見做し、植円換算半径 $\sqrt{\lambda_p \lambda_s}$ を求め、波長の変化による反力変化の影響を除いた静的反力を用いた^{*}。従って、図-2 の STATIC-DYNAMIC 二曲線の差が土の慣性力であろう。又、図-3 は、 $H = 5 \text{ m}, 10 \text{ m}, 20 \text{ m}$ の場合の、地盤反力の振動数による変化を示す。図から、振動数が増すと地盤反力の増大することが読めるが、これは振動数の増加により波長が短くなり、ひずみが大きくなった影響が他の要素に比して大きく出ているからである。以上のことから、従来の、振動数にかかわらず一定量の土が杭に附着していると見做す附着質量の考え方には、問題があると思われる。

^{*}

花田： 地中構造物の附着質量

九大工学部 昭和40年度卒業論文