

九州大学 教授 山崎徳也

助手 〇彦坂 照

大学院 崎山 毅

〔緒言〕 ハリヤラーメンの曲げ振動を取扱うに当って、振動方程式を撓角法の形式に書き変えて解を求める振動撓角法によれば、微分方程式を直接解くよりも簡明な取扱いが可能であり、等断面直線材については、すでにその実用化がはかられている⁽¹⁾。また先に著者らの一人は振動振り角式を併用して立体ラーメンの振動解析を行った⁽²⁾。本文はさらに構造物によく見られるハンチを考慮した振動撓角式および振動振り角式を誘導し、簡単な計算例によって構造物の固有振動数に及ぼすハンチの影響を考察したものである。

〔I〕 等断面直線材の振動撓角式および振動振り角式

ハンチは通常よく用いられる直線ハンチを取り上げ、その寸法を図-1のごとく定める。梁の等断面部分の梁高、断面二次モーメント、断面積 および断面の振り係数をそれぞれ h_0 , I_0 , A_0 , J_0 とし材料のヤング率 E , セン断弾性係数 G および単位体積当りの質量 P は全スパンにわたって一定とすれば、図-1に示す記号を用いて、スパン $\bar{l}$ の等断面材の振動撓角式および振動振り角式が次の形式で表わされる。係数 k_i , k_i^T 等の内容については別報⁽²⁾ または文献^{(1),(3)} 等を参照されたい。

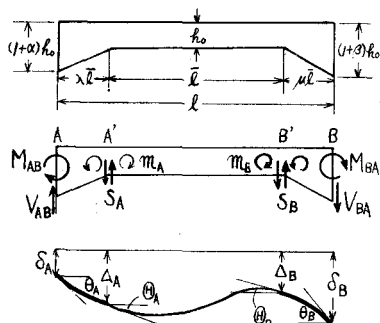


図-1

振動撓角式

$$\left. \begin{aligned} M_A &= EK_0 \left(k_1 \theta_A + k_2 \theta_B + k_3 \frac{\Delta_A}{\bar{l}} + k_4 \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{l}} \right) \right) \\ M_B &= EK_0 \left(k_1 \theta_A + k_2 \theta_B + k_4 \frac{\Delta_A}{\bar{l}} + k_3 \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{l}} \right) \right) \\ S_A &= -EK_0 / \bar{l} \left(k_3 \theta_A + k_4 \theta_B + k_5 \frac{\Delta_A}{\bar{l}} + k_6 \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{l}} \right) \right) \\ S_B &= -EK_0 / \bar{l} \left(k_4 \theta_A + k_3 \theta_B + k_6 \frac{\Delta_A}{\bar{l}} + k_5 \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{l}} \right) \right) \end{aligned} \right\} \text{--- (I)}_a$$

振動振り角式

$$\left. \begin{aligned} M_A^T &= GJ_0 / \bar{l} \left(k_1^T \theta_A^T + k_2^T \theta_B^T \right) \\ M_B^T &= GJ_0 / \bar{l} \left(k_2^T \theta_A^T + k_1^T \theta_B^T \right) \end{aligned} \right\} \text{--- (I)}_b$$

〔II〕 ハンチを考慮した振動撓角式

振動の微分方程式 $PA \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) = 0$

において、 $y = y(x) e^{i\omega t}$ とおき、 $y(x)$ のかわりに y と書けば、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) - PA \omega^2 y = 0 \text{ --- (2)}$$

いま A 側のハンチを考え、図-2のごとく座標軸を定めれば

$h_x = h_0 (1 + \frac{\alpha}{\lambda \bar{l}} x)$ とする。ここで $1 + \frac{\alpha}{\lambda \bar{l}} x = t$ の置換を行い、さらにハンチ部においては断面積は梁高に、断面二次モーメントは梁高の 3 乗に比例して変化すると仮定して式(2)を t に関する微分方程式に変換すれば、次式を得る。

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + \frac{6}{t} \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{6}{t^2} \frac{d^2 y}{dt^2} - \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^4 m \frac{y}{t^2} = 0 \text{ --- (3)}$$

$$\text{ここに } m = \sqrt{\frac{PA_0 \omega^2}{EI_0}}$$

$x=0$ すなわち $t=1$ における境界条件として次の関係式が成立する。

$$(y)_{t=1} = \Delta_A, \quad \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=1} = -\frac{\lambda \bar{l}}{\alpha} \theta_A, \quad \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)_{t=1} = -\left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^2 \frac{\bar{l}}{EK_0} M_A, \quad \left(\frac{d^3 y}{dt^3} \right)_{t=1} = \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^3 \frac{\bar{l}}{EK_0} S_A, \quad \text{ただし } K_0 = \frac{I_0}{\bar{l}}$$

これを 4 個の初期条件として式(3)を逐次近似法によって解けば、次の形式で第 n 次近似解が得られる。

$$\left. \begin{aligned} y &= f_{11}(t) \Delta_A + f_{12}(t) \Theta_A + f_{13}(t) \frac{\bar{p}}{EK_0} m_A + f_{14}(t) \frac{\bar{p}^2}{EK_0} S_A \\ \frac{dy}{dt} &= f_{21}(t) \Delta_A + f_{22}(t) \Theta_A + f_{23}(t) \frac{\bar{p}}{EK_0} m_A + f_{24}(t) \frac{\bar{p}^2}{EK_0} S_A \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= f_{31}(t) \Delta_A + f_{32}(t) \Theta_A + f_{33}(t) \frac{\bar{p}}{EK_0} m_A + f_{34}(t) \frac{\bar{p}^2}{EK_0} S_A \\ \frac{d^3y}{dt^3} &= f_{41}(t) \Delta_A + f_{42}(t) \Theta_A + f_{43}(t) \frac{\bar{p}}{EK_0} m_A + f_{44}(t) \frac{\bar{p}^2}{EK_0} S_A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

こゝに $f_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) は t の函数である。

一方材端 A において次の関係式が成立する。

$$\delta_A = (y)_{t=H}, \quad \Theta_A = -\left(\frac{\alpha}{\lambda \bar{L}}\right) \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=H}, \quad \frac{M_{AB}}{EI_A} = -\left(\frac{\alpha}{\lambda \bar{L}}\right)^2 \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_{t=H}, \quad \frac{V_{AB}}{EI_A} = \left(\frac{\alpha}{\lambda \bar{L}}\right)^3 \left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)_{t=H}$$

これらの右辺に式(4)を代入して整理すれば結局次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta_A}{\bar{L}} &= a_{11} \frac{\Delta_A}{\bar{L}} + a_{12} \Theta_A + a_{13} \frac{1}{EK_0} m_A + a_{14} \frac{\bar{p}}{EK_0} S_A \\ \Theta_A &= a_{21} \frac{\Delta_A}{\bar{L}} + a_{22} \Theta_A + a_{23} \frac{1}{EK_0} m_A + a_{24} \frac{\bar{p}}{EK_0} S_A \\ \frac{\bar{p}}{EI_A} M_{AB} &= a_{31} \frac{\Delta_A}{\bar{L}} + a_{32} \Theta_A + a_{33} \frac{1}{EK_0} m_A + a_{34} \frac{\bar{p}}{EK_0} S_A \\ \frac{\bar{p}^2}{EI_A} V_{AB} &= a_{41} \frac{\Delta_A}{\bar{L}} + a_{42} \Theta_A + a_{43} \frac{1}{EK_0} m_A + a_{44} \frac{\bar{p}}{EK_0} S_A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

式(4)の第3近似解を求めれば係数 a_{ij} は次のごとく得られる。

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, & a_{12} &= -\lambda, & a_{13} &= -\frac{1}{2} \lambda^2, & a_{14} &= \frac{1}{6} \lambda^3 \\ a_{21} &= (\lambda \bar{L})^* \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3 \left\{ (1+\alpha) \log(1+\alpha) - \alpha - \frac{1}{2} \alpha^2 \right\}, & a_{22} &= 1, & a_{23} &= \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) \left\{ 6(1+\alpha) \log(1+\alpha) - 5\alpha - 3\alpha^2 \right\}, \\ a_{24} &= \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 \left\{ 3(1+\alpha)^2 \log(1+\alpha) - 5\alpha^2 - 3\alpha \right\}, & a_{31} &= (\lambda \bar{L})^* \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 \left\{ (6\alpha+13) \log(1+\alpha) - 13\alpha \right\}, \\ a_{32} &= (\lambda \bar{L})^* \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3 \left\{ (\alpha+2) \log(1+\alpha) - 2\alpha \right\}, & a_{33} &= 1 + 6 \left\{ (6\alpha+13) \log(1+\alpha) - 13\alpha \right\}, \\ a_{34} &= 6 \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) \left\{ (8\alpha+9) \log(1+\alpha) - 3(1+\alpha) \left\{ \log(1+\alpha) \right\}^2 - \frac{55}{6} \alpha \right\} \\ a_{41} &= (\lambda \bar{L})^* \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) \left\{ \frac{55\alpha}{1+\alpha} - (48 + \frac{6}{1+\alpha}) \log(1+\alpha) + 18 \left\{ \log(1+\alpha) \right\}^2 \right\} \\ a_{42} &= (\lambda \bar{L})^* \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 \left\{ \frac{7\alpha}{1+\alpha} - 7 \log(1+\alpha) + 3 \left\{ \log(1+\alpha) \right\}^2 \right\}, & a_{43} &= 1 + 6 \left\{ \frac{13\alpha}{1+\alpha} - 14 \log(1+\alpha) + 9 \left\{ \log(1+\alpha) \right\}^2 - 6 \left\{ \log(1+\alpha) \right\}^3 \right\} \\ a_{44} &= (\lambda \bar{L})^* \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3 \left\{ \log(1+\alpha) - \frac{\alpha(2+\alpha)}{2(1+\alpha)} \right\} + 6 \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \left\{ \frac{55\alpha}{1+\alpha} - (48 + \frac{6}{1+\alpha}) \log(1+\alpha) + 18 \left\{ \log(1+\alpha) \right\}^2 \right\} \end{aligned}$$

こゝに式(5)の右辺の m_A, S_A に式(1)a を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta_A}{\bar{L}} &= (a_{11} + a_{13} k_3 - a_{14} k_5) \frac{\Delta_A}{\bar{L}} + (a_{12} + a_{13} k_1 - a_{14} k_3) \Theta_A + (a_{13} k_4 - a_{14} k_6) \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{L}}\right) + (a_{13} k_2 - a_{14} k_4) \Theta_B \\ \Theta_A &= (a_{21} + a_{23} k_3 - a_{24} k_5) \frac{\Delta_A}{\bar{L}} + (a_{22} + a_{23} k_1 - a_{24} k_3) \Theta_A + (a_{23} k_4 - a_{24} k_6) \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{L}}\right) + (a_{23} k_2 - a_{24} k_4) \Theta_B \\ \frac{\bar{p}}{EI_A} M_{AB} &= (a_{31} + a_{33} k_3 - a_{34} k_5) \frac{\Delta_A}{\bar{L}} + (a_{32} + a_{33} k_1 - a_{34} k_3) \Theta_A + (a_{33} k_4 - a_{34} k_6) \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{L}}\right) + (a_{33} k_2 - a_{34} k_4) \Theta_B \\ \frac{\bar{p}^2}{EI_A} V_{AB} &= (a_{41} + a_{43} k_3 - a_{44} k_5) \frac{\Delta_A}{\bar{L}} + (a_{42} + a_{43} k_1 - a_{44} k_3) \Theta_A + (a_{43} k_4 - a_{44} k_6) \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{L}}\right) + (a_{43} k_2 - a_{44} k_4) \Theta_B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

B側ハンチについても全く同様な式が成立し、各係数は α を β , λ を μ に変えればよい。

A, B面端に関して式(6)を次のように簡略化して表わす。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta_A}{\bar{L}} &= A_{11} \frac{\Delta_A}{\bar{L}} + A_{12} \Theta_A + A_{13} \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{L}}\right) + A_{14} \Theta_B \\ \Theta_A &= A_{21} \frac{\Delta_A}{\bar{L}} + A_{22} \Theta_A + A_{23} \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{L}}\right) + A_{24} \Theta_B \\ \frac{\bar{p}}{EI_A} M_{AB} &= A_{31} \frac{\Delta_A}{\bar{L}} + A_{32} \Theta_A + A_{33} \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{L}}\right) + A_{34} \Theta_B \\ \frac{\bar{p}^2}{EI_A} V_{AB} &= A_{41} \frac{\Delta_A}{\bar{L}} + A_{42} \Theta_A + A_{43} \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{L}}\right) + A_{44} \Theta_B \end{aligned} \right\} (7)_a$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\delta_B}{\bar{L}} &= B_{11} \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{L}}\right) + B_{12} \Theta_B + B_{13} \left(\frac{\Delta_A}{\bar{L}}\right) + B_{14} \Theta_A \\ \Theta_B &= B_{21} \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{L}}\right) + B_{22} \Theta_B + B_{23} \left(\frac{\Delta_A}{\bar{L}}\right) + B_{24} \Theta_A \\ \frac{\bar{p}}{EI_B} M_{BA} &= B_{31} \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{L}}\right) + B_{32} \Theta_B + B_{33} \left(\frac{\Delta_A}{\bar{L}}\right) + B_{34} \Theta_A \\ \frac{\bar{p}^2}{EI_B} V_{BA} &= B_{41} \left(-\frac{\Delta_B}{\bar{L}}\right) + B_{42} \Theta_B + B_{43} \left(\frac{\Delta_A}{\bar{L}}\right) + B_{44} \Theta_A \end{aligned} \right\} (7)_b$$

式(7)a, (7)b の上2式をそれぞれ取り出し、 $\frac{\Delta_A}{\bar{L}}, \Theta_A, -\frac{\Delta_B}{\bar{L}}, \Theta_B$ に関する4元連立1次方程式として解けば、Cramér の公式により次の式(8)のごとく解を得る。

式(8)中、Dは係数の行列式で右記のこゝに内容を持ち、また α_{ij} は

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ B_{13} & B_{14} & B_{11} & B_{12} \\ B_{23} & B_{24} & B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}$$

D の i 行 j 列の要素の余因数である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta_A}{\ell} &= \frac{1}{D} \left(\alpha_{11} \frac{\delta_A}{\ell} + \alpha_{21} \theta_A + \alpha_{31} \left(-\frac{\delta_B}{\ell}\right) + \alpha_{41} \theta_B \right) \\ \theta_A &= \frac{1}{D} \left(\alpha_{12} \frac{\delta_A}{\ell} + \alpha_{22} \theta_A + \alpha_{32} \left(-\frac{\delta_B}{\ell}\right) + \alpha_{42} \theta_B \right) \\ -\frac{\Delta_B}{\ell} &= \frac{1}{D} \left(\alpha_{13} \frac{\delta_A}{\ell} + \alpha_{23} \theta_A + \alpha_{33} \left(-\frac{\delta_B}{\ell}\right) + \alpha_{43} \theta_B \right) \\ \theta_B &= \frac{1}{D} \left(\alpha_{14} \frac{\delta_A}{\ell} + \alpha_{24} \theta_A + \alpha_{34} \left(-\frac{\delta_B}{\ell}\right) + \alpha_{44} \theta_B \right) \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

式(8)を式(7)_a, (7)_bの下2式にそれぞれ代入して整理すれば次のごとく所要の振動撓角式を得る。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{EI_A}{\ell} \left(K_1 \theta_A + K_2 \theta_B + K_3 \frac{\delta_A}{\ell} + K_4 \left(-\frac{\delta_B}{\ell}\right) \right) \\ M_{BA} &= \frac{EI_B}{\ell} \left(L_1 \theta_A + L_2 \theta_B + L_3 \frac{\delta_A}{\ell} + L_4 \left(-\frac{\delta_B}{\ell}\right) \right) \\ \bar{\ell} V_{AB} &= \frac{EI_A}{\ell} \left(F_1 \theta_A + F_2 \theta_B + F_3 \frac{\delta_A}{\ell} + F_4 \left(-\frac{\delta_B}{\ell}\right) \right) \\ \bar{\ell} V_{BA} &= \frac{EI_B}{\ell} \left(G_1 \theta_A + G_2 \theta_B + G_3 \frac{\delta_A}{\ell} + G_4 \left(-\frac{\delta_B}{\ell}\right) \right) \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

ハンチが左右対称の場合には式(9)は次のように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{EI_A}{\ell} \left(K_1 \theta_A + K_2 \theta_B + K_3 \frac{\delta_A}{\ell} + K_4 \left(-\frac{\delta_B}{\ell}\right) \right) \\ M_{BA} &= \frac{EI_B}{\ell} \left(K_2 \theta_A + K_1 \theta_B + K_4 \frac{\delta_A}{\ell} + K_3 \left(-\frac{\delta_B}{\ell}\right) \right) \\ \bar{\ell} V_{AB} &= \frac{EI_A}{\ell} \left(F_1 \theta_A + F_2 \theta_B + F_3 \frac{\delta_A}{\ell} + F_4 \left(-\frac{\delta_B}{\ell}\right) \right) \\ \bar{\ell} V_{BA} &= \frac{EI_B}{\ell} \left(F_2 \theta_A + F_1 \theta_B + F_4 \frac{\delta_A}{\ell} + F_3 \left(-\frac{\delta_B}{\ell}\right) \right) \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

ここに K, L, F, G 等の内容を matrix 表示すれば次のごとくである。

$$\begin{pmatrix} K_1 & F_1 \\ K_2 & F_2 \\ K_3 & F_3 \\ K_4 & F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{21} & A_{41} \\ A_{22} & A_{42} \\ A_{33} & A_{43} \\ A_{34} & A_{44} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} L_1 & G_1 \\ L_2 & G_2 \\ L_3 & G_3 \\ L_4 & G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{41} & \alpha_{42} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{31} & B_{41} \\ B_{32} & B_{42} \\ B_{33} & B_{43} \\ B_{34} & B_{44} \end{pmatrix}$$

なおハンチがなり場合、 $\lambda, \mu, \alpha, \beta \rightarrow 0$ とすれば式(9)は式(11)に当然一致する。

(計算例1)

左右対称のハンチを有する両端固定バリの振動数方程式は、式(17)_a, (7)_b から

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ B_{13} & B_{14} & B_{21} & B_{22} \\ B_{23} & B_{24} & B_{31} & B_{32} \end{vmatrix} = 0 \dots (11)$$

種々の α, λ の値に対して式(11)の根を求めて基本固有振動数を計算し、ハンチの効果と吟味したものが図-3である。

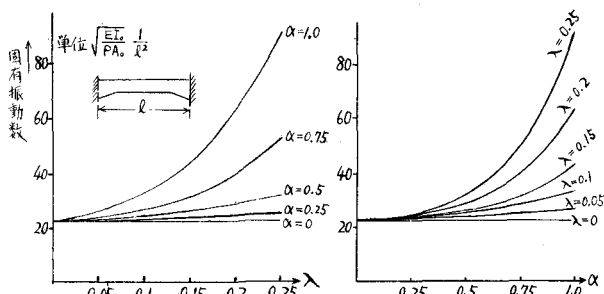


図-3

(計算例2) 図-4のごとき1層1スパンの対称ラーメンが逆対称の横振動を行う場合の

固有振動数を算定する。梁と柱が同一断面と仮定し

$$\left. \begin{aligned} \text{節点方程式} \quad M_{AX} + M_{AB} &= 0 \\ \text{層方程式} \quad V_{AB} - \frac{1}{2} PA \cdot \bar{\ell} (1+2\lambda) \omega^2 \Delta_A &= 0 \end{aligned} \right\} \text{に式(9)を代入すれば}$$

$$\text{振動数方程式は} \begin{vmatrix} (1+\alpha)^2 (K_1 + K_2 + L_2) & -(1+\alpha)^2 G_2 \\ (1+\alpha)^2 G_2 & -(1+\alpha)^2 G_4 + \frac{1}{2} (1+2\lambda) m \bar{\ell}^2 \end{vmatrix} = 0$$

一算例として $\alpha = 1.0, \lambda = 0.1$ に対して基本固有振動数を求めれば

$$\omega = 10.39 \sqrt{\frac{EI_0}{PA \cdot \bar{\ell}^2}} \text{ を得る。}$$

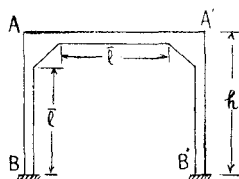


図-4

〔Ⅲ〕ハンクを考慮した振動振り角式

巾 b 、高さ h なる矩形断面部材を考へ、 b はハンク部においても変化せず h のみが直線変化すると仮定する。式(2)に対応する振り振動の微分方程式は次の通りである。

$$\frac{\partial}{\partial x}(GJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) + P I_p \omega^2 v = 0 \quad \text{----- (12)}$$

振り係数 J は Saint-Venant の近似式によれば $J = \left\{ \frac{1}{3} - \frac{0.7}{3} \frac{b}{h} + 0.019 \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right\} h b^3$ であるが、ハンク部においては $\left\{ \quad \right\}$ 内の第3項を無視して、 $h = h_0 t$ とおき、 $J = \frac{1}{3} (t - 0.7 \frac{b}{h_0}) h_0 b^3$ を用いる。

また $I_p = \frac{1}{12} (h b^3 + b h^3) = \frac{1}{12} h_0 b^3 t (1 + \frac{h_0^2}{b^2} t^2)$ である。これらを用い、さらに $t - 0.7 = \xi$ とおけば式(12)は次のごとく ξ に関する微分方程式に変換される。

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dv}{d\xi} + k_0 (\xi^2 + \eta_1 \xi + \eta_2 + \frac{\eta_3}{\xi}) v = 0 \quad \text{----- (13)}$$

$$\text{こゝに } k_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^2 \frac{h_0^2 J_0}{b^3 I_p}, \quad \eta_1 = 2.1 \frac{b}{h_0}, \quad \eta_2 = 2.47 \left(\frac{b}{h_0} \right)^2, \quad \eta_3 = 1.043 \left(\frac{b}{h_0} \right)^3, \quad \nu = \sqrt{\frac{P I_p \omega^2}{G J_0}}$$

図-2の座標を用いければ、 $x=0$ において $\xi = 1 - 0.7 \frac{b}{h_0}$ となり、この時 $v = \Theta_A^T$, $\frac{dv}{d\xi} = \frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} m_A^T$ なる関係式が成立する。これらを2個の初期条件として式(13)を逐次近似法で解き、振動撓角法の誘導に用いたと全く同様の手法で、所要の振動振り角式が導かれる。結果のみ記せば、式(9), (10)に対応するものとしてそれぞれ次の式(14), (15)を得る。

$$\begin{aligned} M_{AB}^T &= GJ_B \frac{\lambda}{\alpha} \left\{ K_1^T \Theta_A^T + K_2^T \Theta_B^T \right\} \\ M_{BA}^T &= GJ_B \frac{\lambda}{\alpha} \left\{ L_1^T \Theta_A^T + L_2^T \Theta_B^T \right\} \end{aligned} \quad \text{----- (14)}$$

$$\begin{aligned} M_{AB}^T &= GJ_B \frac{\lambda}{\alpha} \left\{ K_1^T \Theta_A^T + K_2^T \Theta_B^T \right\} \\ M_{BA}^T &= GJ_B \frac{\lambda}{\alpha} \left\{ K_2^T \Theta_A^T + K_1^T \Theta_B^T \right\} \end{aligned} \quad \text{----- (15)}$$

係数 K_1^T , L_1^T 等の内容を一括して示せば、式(5)の係数 a_{ij} に対応する a_{ij}^T , b_{ij}^T を用いて、次のごとくである。

$$K_1^T = \frac{1}{D} (A_{11} B_{11} - A_{22} B_{12}), \quad K_2^T = \frac{1}{D} (A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21})$$

$$L_1^T = \frac{1}{D} (B_{21} A_{11} - B_{22} A_{12}), \quad L_2^T = \frac{1}{D} (B_{11} B_{22} - B_{12} B_{21})$$

$$\text{こゝに } D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ B_{12} & B_{11} \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = a_{11}^T + a_{12}^T h_1^T, \quad A_{12} = a_{12}^T h_2^T, \quad A_{21} = a_{21}^T + a_{22}^T h_1^T, \quad A_{22} = a_{22}^T h_2^T$$

$$B_{11} = b_{11}^T + b_{12}^T h_1^T, \quad B_{12} = b_{12}^T h_2^T, \quad B_{21} = b_{21}^T + b_{22}^T h_1^T, \quad B_{22} = b_{22}^T h_2^T$$

〔結言〕 上に求めた振動撓角式および振動振り角式の諸係数の値を、種々の α , λ 等の値に対して計算し表化しておけば、任意の多層多スパンラーメンあるいは立体ラーメンのハンクを考慮した振動解析の実用化が可能である。本文に用いた手法は、直線ハンクのみならずパラボラ等の曲線ハンクを有する部材に対しても応用でき、さらに固有振動数 ω のかわりに強制変位の円振動数を用いれば、強制振動にも適用できる。

(参考文献)

- (1) 小野薫：“振動撓角法とその実用化” 建築学会大会論文集 昭和12年3月
- (2) 山崎, 太田, 毛利：“振動撓角法による立体直線材ラーメンの固有週期算定法”
土木学会第18回年次学術講演会概要 昭和38年5月
- (3) 梅村魁他： 建築学大系 19“建築耐震論” 彰国社