Ⅱ－15　ヘリコイド格子の解法

九州大学　教　授　山崎徳也
九州大学　大学院　太田俊昭
九州大学　学　生○後藤栄一

§1 序、最近の電子計算機の発展は目覚しく、周知のごとく多元連立一次方程式のサブルーチンは既に公式化されており、したがって今日構造解析における問題点は所要の連立方程式をいかに容易に求めるかに帰着するといっても過言ではない。
本論文は一般3次元撓角式を用いて変形法によるヘリコイド格子の応力解析手法を提案するもので、概要は材端の一般力および変形成分を列行列で表わしたうえで、これを一種のベクトルとみなせば、1節点に1つの節点方程式および力の釣合式を単なるベクトル和として表わすことができ、所要の連立方程式をきわめて容易に求めうることになる。

§2、基本式の誘導
著者らがかつて報告した一般3次元撓角式[1]より一般に任意の空間部材A, Bの端モーメントおよびせん断力は次式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} M^t_{AB} \\ M^n_{AB} \\ M^\zeta_{AB} \\ M^t_{BA} \\ M^n_{BA} \\ M^\zeta_{BA} \\ l_0 F^t_{AB} \\ l_0 F^n_{AB} \\ l_0 F^\zeta_{AB} \\ l_0 F^t_{BA} \\ l_0 F^n_{BA} \\ l_0 F^\zeta_{BA} \end{bmatrix} = EK \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1\,12} \\ \vdots & \beta_{ij} & \vdots \\ \beta_{12\,1} & \cdots & \beta_{12\,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^t_A \\ \theta^n_A \\ \theta^\zeta_A \\ \theta^t_B \\ \theta^n_B \\ \theta^\zeta_B \\ \Delta^t_A/l_0 \\ \Delta^n_A/l_0 \\ \Delta^\zeta_A/l_0 \\ \Delta^t_B/l_0 \\ \Delta^n_B/l_0 \\ \Delta^\zeta_B/l_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^t_{AB} \\ C^n_{AB} \\ C^\zeta_{AB} \\ C^t_{BA} \\ C^n_{BA} \\ C^\zeta_{BA} \\ l_0 P^t_{AB} \\ l_0 P^n_{AB} \\ l_0 P^\zeta_{AB} \\ l_0 P^t_{BA} \\ l_0 P^n_{BA} \\ l_0 P^\zeta_{BA} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

ただし、θ、Δ、C　P、およびl_0はそれぞれ回転角、変位、荷重項、荷重、および標準長さ、β_{ij}は形状項、また、E、$K = I_\zeta/S$（S: 部材長）はそれぞれヤング係数、剛度である。
なお、座標系は（t、n、b）軸の代りに（t、n、$\zeta=-b$）軸を用いることにする。
さて、材端の一般力および変形成分の表現方法として以下の列行列を用いればこれを一種のベクトルとみなすことができ、のちの解析をきわめて容易にすることが可能となる。
すなわち、AB部材のA端のt, n, ζ軸に関するそれぞれのモーメントであるM^t_{AB}, M^n_{AB}, M^ζ_{AB}を一括して$\mathbf{M}_{AB}$なるベクトルで表せば次のごとくなる。

$$\mathbf{M}_{AB}=\begin{bmatrix}M^t_{AB}\\ M^n_{AB}\\ M^\zeta_{AB}\end{bmatrix}\quad \text{同様に、}\quad \mathbf{M}_{BA}=\begin{bmatrix}M^t_{BA}\\ M^n_{BA}\\ M^\zeta_{BA}\end{bmatrix}\quad \mathbf{F}_{AB}=\begin{bmatrix}F^t_{AB}\\ F^n_{AB}\\ F^\zeta_{AB}\end{bmatrix}\quad \mathbf{F}_{BA}=\begin{bmatrix}F^t_{BA}\\ F^n_{BA}\\ F^\zeta_{BA}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\theta}_A=\begin{bmatrix}\theta^t_A\\ \theta^n_A\\ \theta^\zeta_A\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\theta}_B=\begin{bmatrix}\theta^t_B\\ \theta^n_B\\ \theta^\zeta_B\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_A=\begin{bmatrix}\Delta^t_A\\ \Delta^n_A\\ \Delta^\zeta_A\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\Delta}_B=\begin{bmatrix}\Delta^t_B\\ \Delta^n_B\\ \Delta^\zeta_B\end{bmatrix}\quad \mathbf{C}_{AB}=\begin{bmatrix}C^t_{AB}\\ C^n_{AB}\\ C^\zeta_{AB}\end{bmatrix}\quad \mathbf{C}_{BA}=\begin{bmatrix}C^t_{BA}\\ C^n_{BA}\\ C^\zeta_{BA}\end{bmatrix}\quad \mathbf{P}_{AB}=\begin{bmatrix}P^t_{AB}\\ P^n_{AB}\\ P^\zeta_{AB}\end{bmatrix}\quad \mathbf{P}_{BA}=\begin{bmatrix}P^t_{BA}\\ P^n_{BA}\\ P^\zeta_{BA}\end{bmatrix}$$

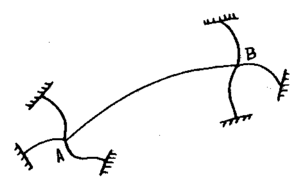
よってこれらの関係を式(1)に代入すれば、結局3次元撓角式は下記のごとく簡単にベクトル表示できる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{AB}&=EK\left([a_{AB}]\boldsymbol{\theta}_A+[b_{AB}]\boldsymbol{\theta}_B+[c_{AB}]\boldsymbol{\Delta}_A/\ell_0+[d_{AB}]\boldsymbol{\Delta}_B/\ell_0\right)+\mathbf{C}_{AB}\\
\mathbf{M}_{BA}&=EK\left([b_{BA}]\boldsymbol{\theta}_A+[a_{BA}]\boldsymbol{\theta}_B+[d_{BA}]\boldsymbol{\Delta}_A/\ell_0+[c_{BA}]\boldsymbol{\Delta}_B/\ell_0\right)+\mathbf{C}_{BA}\\
\ell_0\mathbf{F}_{AB}&=EK\left([a'_{AB}]\boldsymbol{\theta}_A+[b'_{AB}]\boldsymbol{\theta}_B+[c'_{AB}]\boldsymbol{\Delta}_A/\ell_0+[d'_{AB}]\boldsymbol{\Delta}_B/\ell_0\right)+\ell\mathbf{P}_{AB}\\
\ell\mathbf{F}_{BA}&=EK\left([b'_{BA}]\boldsymbol{\theta}_A+[a'_{BA}]\boldsymbol{\theta}_B+[d'_{BA}]\boldsymbol{\Delta}_A/\ell_0+[c'_{BA}]\boldsymbol{\Delta}_B/\ell_0\right)+\ell\mathbf{P}_{BA}
\end{aligned}\tag{2}$$

ただし、$[a_i]$, $[a'_i]$, $[b_i]$, $[b'_i]$, $[c_i]$, $[c'_i]$, $[d_i]$, $[d'_i]$, $(i=AB, BA)$ は3行3列のマトリックスである。

§3、一般解法

一般構造物を前記の表現にしたがって解くには1節点に1個づつのベクトル表示したモーメントおよび力の釣合式をたてればよく、例えば図−1のごとき立体構造物の解析を対象とする場合は次のようにして所要の連立方程式を簡単に求めることができる。



図−1

すなわち、AB両端のモーメントおよび力の釣合式は

$$\sum_i \mathbf{M}_{Ai}=0,\quad \sum_i \mathbf{M}_{Bi}=0,\quad \sum_i \mathbf{F}_{Ai}=0,\quad \sum_i \mathbf{F}_{Bi}=0\tag{3}$$

式(2)を上式に代入すれば

$$\begin{aligned}
&EK_0\Big(\sum_i k[a_{Ai}]\boldsymbol{\theta}_A+k[b_{AB}]\boldsymbol{\theta}_B+\sum_i k[c_{Ai}]\boldsymbol{\Delta}_A/\ell_0+k[d_{AB}]\boldsymbol{\Delta}_B/\ell_0\Big)+\sum\mathbf{C}_{Ai}=0\\
&EK_0\Big(k[b_{BA}]\boldsymbol{\theta}_A+\sum_i k[a_{Bi}]\boldsymbol{\theta}_B+k[d_{BA}]\boldsymbol{\Delta}_A/\ell_0+\sum_i k[c_{Bi}]\boldsymbol{\Delta}_B/\ell_0\Big)+\sum\mathbf{C}_{Bi}=0\\
&EK_0\Big(\sum_i k[a'_{Ai}]\boldsymbol{\theta}_A+k[b'_{AB}]\boldsymbol{\theta}_B+\sum_i k[c'_{Ai}]\boldsymbol{\Delta}_A/\ell_0+k[d'_{AB}]\boldsymbol{\Delta}_B/\ell_0\Big)+\sum\ell_0\mathbf{P}_{Ai}=0\\
&EK_0\Big(k[b'_{BA}]\boldsymbol{\theta}_A+\sum_i k[a'_{Bi}]\boldsymbol{\theta}_B+k[d'_{BA}]\boldsymbol{\Delta}_A/\ell_0+\sum_i k[c'_{Bi}]\boldsymbol{\Delta}_B/\ell_0\Big)+\sum\ell_0\mathbf{P}_{Bi}=0
\end{aligned}\tag{4}$$

式(4)よりただちに、マトリックス表示した所要の連立方程式を次のごとくうる。

$$EK_0\begin{bmatrix}
\sum_i k[a_{Ai}] & k[b_{AB}] & \sum_i k[c_{Ai}] & k[d_{AB}]\\
k[b_{Bi}] & \sum k[a_{Bi}] & k[d_{BA}] & \sum_i k[c_{Bi}]\\
\sum_i k[a'_{Ai}] & k[b'_{AB}] & \sum_i k[c'_{Ai}] & k[d'_{AB}]\\
k[b'_{BA}] & \sum_i k[a'_{Bi}] & k[d'_{BA}] & \sum_i k[c'_{Bi}]
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}_A\\ \boldsymbol{\theta}_B\\ \boldsymbol{\Delta}_A/\ell_0\\ \boldsymbol{\Delta}_B/\ell_0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\sum\mathbf{C}_{Ai}\\ \sum\mathbf{C}_{Bi}\\ \sum\ell_0\mathbf{P}_{Ai}\\ \sum\ell_0\mathbf{P}_{Bi}\end{bmatrix}\tag{5}$$

ただし K_0 は標準剛度である。

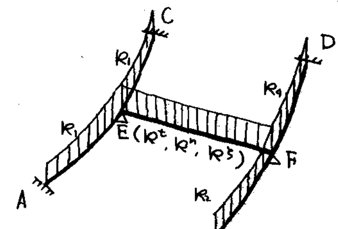
すなわち式(5)の意味するところは、左辺は12行12列の正方マトリックスと12行1列の未知

の変形量に関するマトリックスの積をあらわし、右辺は荷重項に関する12行1列のマトリックスをあらわすものである。
上式を連立に解けば、θ_A, θ_B, Δ_A, Δ_B の各成分が定まり、したがって所要のモーメントおよびせん断力が算出できる。

§4. ヘリコイド格子への適用

前記の方法を実際に図－2のごときA.B.C.D端固定の2主桁2スパンのヘリコイド格子の解析に適用すれば以下のごとくなる。

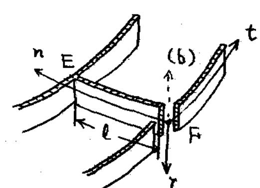
荷重は鉛直等分布とし、EFの支持条件は回転のみを許し変位が生じない場合を取扱った。



図－2

さて、材端モーメントは式(2)にしたがえば、それぞれ次のように表わされる。

$$
\begin{aligned}
M_{EA} &= E\,K_0\,k_1[a_{EA}]\theta_E + C_{EA}\\
M_{EC} &= E\,K_0\,k_3[a_{EC}]\theta_E + C_{EC}\\
M_{EF} &= E\,K_0[a_{EF}]\theta_E + E\cdot K_0[b_{FE}]\theta_E + C_{EF}\\
M_{FE} &= E\,K_0[a_{FE}]\theta_F + E\,K_0[b_{FE}]\theta_E + C_{FE}\\
M_{FB} &= E\,K_0\,k_2[a_{FB}]\theta_F + C_{FB}\\
M_{FD} &= E\,K_0\,k_4[a_{FD}]\theta_F + C_{FD}
\end{aligned}
\qquad (6)
$$



図－3

ただし標準剛度K_0は便宜上直線部材EFのそれにとり$K_0 = I_\zeta/\ell$ である。

ここに直線部材E.Fの端モーメントを標準座標(t.n.ζ)に基づいて表わせば図－3よりn方向が捩りt.ζ方向が曲げを生ずるゆえ、$[a_{EF}]$, $[a_{FE}]$, $[b_{EF}]$, $[b_{FE}]$ はそれぞれ次のごとき内容となる。

$$
[a_{EF}] = \begin{bmatrix} 4k^t & 0 & 0 \\ 0 & k^n & 0 \\ 0 & 0 & 4k^\zeta \end{bmatrix}
\qquad
[b_{EF}] = \begin{bmatrix} 2k^t & 0 & 0 \\ 0 & -k^n & 0 \\ 0 & 0 & 2k^\zeta \end{bmatrix}
$$

$$
[a_{FE}] = \begin{bmatrix} 4k^t & 0 & 0 \\ 0 & k^n & 0 \\ 0 & 0 & 4k^\zeta \end{bmatrix}
\qquad
[b_{FE}] = \begin{bmatrix} 2k^t & 0 & 0 \\ 0 & -k^n & 0 \\ 0 & 0 & 2k^\zeta \end{bmatrix}
$$

ただし、$k^t = \dfrac{I_t/\ell}{K_0}$, $k^n = \dfrac{GJ}{\ell E K_0}$, $k^\zeta = 1$ とする。

I_t, J、は直線部材EFのt軸に関する断面2次モーメントおよび捩り剛度を表わす。又ℓは部材長である。

次に節点ＥＦにおいて、節点方程式をたてると式(3)と同様にして、

$$\sum M_{Ei} = 0 \qquad\qquad \sum M_{Fi} = 0$$

すなわち，　$M_{EA} + M_{EF} + M_{EC} = 0$　　$M_{FB} + M_{FD} + M_{FE} = 0$

これに式(6)を代入して次式をうる。

$$EK_0(k_1[a_{EA}] + [a_{EF}] + k_3[a_{EC}])\theta_E + EK_0[b_{EF}]\theta_F + C_{EA} + C_{EC} + C_{EF} = 0$$

$$EK_0[b_{FE}]\theta_F + EK_0([a_{FE}] + k_2[a_{FB}] + k_4[a_{FD}])\theta_F + C_{FE} + C_{FB} + C_{FD} = 0$$

これをマトリックス表示するとただちに次のごとく所要の連立方程式がえられる。

$$EK_0\begin{bmatrix} k_1[a_{EA}] + [a_{EF}] + k_3[a_{EC}] & [b_{EF}] \\ [b_{FE}] & [a_{FE}] + k_2[a_{FB}] + k_4[a_{FD}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_E \\ \theta_F \end{bmatrix} = -\begin{vmatrix} C_{EA} + C_{EC} + C_{EF} \\ C_{FE} + C_{FB} + C_{FD} \end{vmatrix}$$

§5　結語

本論文はヘリコイド格子などの任意の空間部材を有する最も一般的な構造物を対象として変形法に基く応力解析を行ったものであり、その骨子はマトリックス解析とベクトル解析との相関性を利用すれば所要の連立方程式を極めて単純明解なる考察過程のもとに誘導できることにある。その主たる特色を述べれば、第1に標準座標に対してあらかじめ各部材の材端力および端せん力をマトリックスを用いてベクトル表示しておけば、その後の計算を機械的に行うことが可能となる点であり，第2は、材端力と材端モーメントを同様に変形成分で一般表示することにより、力の釣合式とモーメントの釣合式を同種に取扱うことができ、立体構造を整然と解くことが可能となることにある。

参考文献

(1) 山崎、太田 "一般3次元撓角式"
昭和37年度土木学会西部支部研究発表会論文集