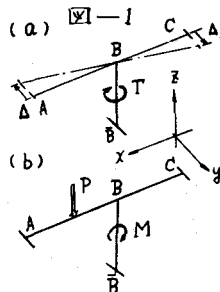


## II-14 弾性捩り後に曲げを受ける一様断面はりの弾塑性応力

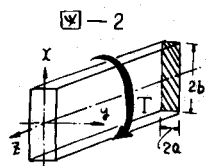
九州大学 教授 山崎 徳也

大学院の太田 俊昭

I. 序言 一定の捩りモーメントが作用している一様断面の部材では一般に曲げに対して弾性限度の低下と完全塑性モーメントの減少が認められる。これは捩り応力すなわちせん断応力の影響を受けて断面の一部が通常の降伏応力の以下の値で降伏してしまう所に起因する。いま図-1(a)のごときラークメントをとりだし、固定端CおよびAが地盤変化などの原因によってそれぞれy方向に±Δたけすれ、柱BBに捩りモーメントTを生じたと仮定する。かかるとき図-1(b)のごとき自動車などの活荷重を受けて柱BBに新たに曲げモーメントMが加われば、この柱は弾性範囲内のわずかなモーメントによっても降伏さらには崩壊してしまう恐れがある。本論文ではかきのごとき捩られたのちに曲げを受けるはり構造物の弾塑性挙動を把握するため、その基礎段階としてまず捩りのせん断応力分布の影響を加味した曲げ応力分布を求め、これよりモーメントMと曲率φとの関係式を誘導し、加えてMとTの相関関係を求めたものである。



II. 理論的考察 一様矩形断面の部材が捩りモーメント  $T$  ( $\leq T_y$ ) を受けた場合捩り角を  $\omega$ 、捩りの応力函数を  $\chi$  とし、座標  $(x, y, z)$  を図-2のごとき定めれば既往の研究<sup>1)</sup>より捩りの応力函数は  $\chi = \omega G(a^2 - y^2)$



またせん断力  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$  はそれぞれ次のごとく与えられる。ただし  $q/b \approx 0$

$$\tau_{zx} = -\partial\chi/\partial y = 2\omega G y, \quad \tau_{zy} = \partial\chi/\partial x = 0 \quad (1)$$

$$\text{さて、ビークスの降伏条件式は} \quad \sigma^2 + 3(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) = \sigma_y^2 \quad (2)$$

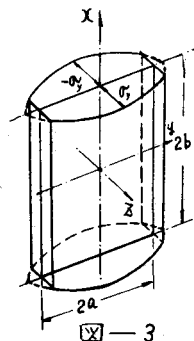
とあらわされるゆえ上式に式(1)を代入すれば捩りのせん断応力の影響を考慮した新しい曲げ降伏応力  $\bar{\sigma}_y$  の分布式が求められ次式となる。

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y \{1 - (\omega/\omega_y)^2 (y/a)^2\}^{1/2}$$

ここで捩りモーメント  $T (= \omega GJ)$  と降伏時の捩りモーメント  $T_y (= \omega_y GJ)$  の比で与えられる媒介定数  $t (= T/T_y = \omega/\omega_y)$  を導入すれば上式は

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y \{1 - t^2 (y/a)^2\}^{1/2} \quad (3)$$

式(3)より降伏応力  $\bar{\sigma}_y$  は図-3のごとき半径をそれぞれ  $\sigma_y$  および  $a/t$  とする楕円で与えられることになる。

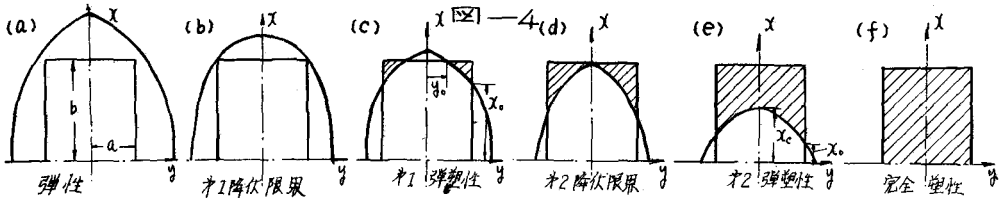


$$\bar{\sigma}_y^2 / \sigma_y^2 + y^2 / (a/t)^2 = 1 \quad \text{ただし} \quad |y| \leq a$$

以上から漸増荷重に対する断面の縁応力が  $\sigma_e = Mb/I < \min(\bar{\sigma}_y) = \sigma_y \sqrt{1-t^2}$  であれば断面の応力はいまだ降伏に至っておらず、(したがってMとφとの関係は弾性のそれであり、Hooke's Law によって  $M = EI\phi$  となる。

一方  $\sigma_e \geq \sigma_y \sqrt{1-t^2}$  となれば式(3)より明らかに断面の一部には塑性領域が発生する。この場合弾性領域と塑性領域との境界は弾性応力  $\sigma_e = \sigma_y \sqrt{1-t^2}$  と降伏応力  $\bar{\sigma}_y$  とを等置すれば直ちに求められ  $\chi^2 / (b\sigma_y/\sigma_e)^2 + y^2 / (a/t)^2 = 1$  なる楕円で与えられる。(したがって弾塑性時の応力状態を図-4

(c), (e) のように応力状態1 (オ1弾塑性) と応力状態2 (オ2弾塑性) とに分けて考察すればそれぞれ以下のようになる。



(1) 応力状態1 (オ1弾塑性) (図-5参照)；

図-5より縁応力  $\sigma_e$  と歪  $\epsilon_e$  との間には

$$\epsilon_e = \sigma_e / E = \phi b \quad (4)$$

また図-4(c) の  $X_0$ ,  $y_0$  のうち  $X_0$  は図-6の  $\Delta PQR$  と  $\Delta OAB$  の相似条件より決定され次のようになる。

$$\text{すなわち } X_0 : b = \sigma_y / \sqrt{1-t^2} : \sigma_y, \quad X_0 / b = \sqrt{1-t^2} / \phi \quad (5)$$

一方の  $y_0$  は縁において  $\sigma_e = \sigma_y$  なる境界条件より定められ

$$y_0 / b = \sqrt{1-\phi^2} / t \quad (6) \quad \text{ただし } \phi = \phi / \phi_y$$

よって弾性および塑性領域の応力  $\sigma_E$  および  $\sigma_P$  はそれぞれ  $\sigma_E = E\phi X$ ,  $\sigma_P = \sigma_y \sqrt{1-t^2} / \phi$  と表わすことができるゆえ、この場合の弾塑性境界は下記の楕円の方程式で与えられる。

$$X^2 / (b\phi)^2 + Y^2 / (ay_0)^2 = 1 \quad (7)$$

以上から応力状態は図-5(c) のように斜線部分が降伏応力  $\sigma_y$  に相当し、いわゆる塑性領域を形成することとなる。よってかかる応力分布に対応する断面の曲げ  $E-X$  ント  $M$  は

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} M &= \int_0^{y_0} \int_0^b \sigma_E X dx dy + \int_{y_0}^b \int_0^a \sigma_E X dx dy + \int_{y_0}^b \int_X^b \sigma_P X dx dy \\ &= \int_0^{y_0} \int_0^b E\phi X^2 dx dy + \int_{y_0}^b \int_0^a E\phi X^2 dx dy + \int_{y_0}^b \int_X^b \sigma_P X dx dy \end{aligned}$$

上式に式(4)~(7)を代入して整理すれば所要の  $E-X$  ント式が次式でえられる。

$$M = \left\{ a_1 - a_2 \phi^2 + a_3 (2\phi \sqrt{1-\phi^2} + \sqrt{1-\phi^2} / \phi + \sin^{-1} \sqrt{1-\phi^2} / \phi - 4 \sin^{-1} \sqrt{1-\phi^2}) \right\} M_y \quad (8)$$

$$\text{ここに } a_1 = \frac{3}{4} \{ \sqrt{1-t^2} + \sin^{-1} t / t \}$$

$$a_2 = \frac{1}{16} \{ 2(1-t^2)^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{1-t^2} + 3 \sin^{-1} t / t \}$$

$$a_3 = \frac{3}{16} \frac{1}{t}$$

$M_y = \frac{1}{4} \sigma_y a b^2$ ：据り  $E-X$  ントを考慮しないで曲げたばかりの場合の降伏  $E-X$  ントをあらわす。

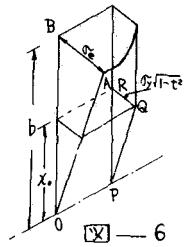
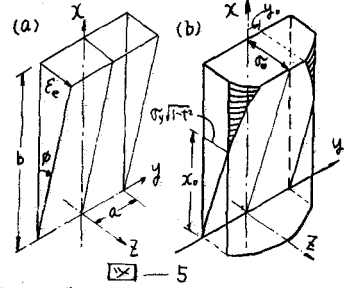
式(8)において  $\phi = \sqrt{1-t^2}$  とおけば図-4(d) で示される応力状態の  $E-X$  ントいわゆるオ1降伏  $E-X$  ント  $M_{y1}$  を与え、次の値となる。

$$M_{y1} = \sqrt{1-t^2} M_y \quad (9)$$

さらに  $\phi = 1$  とおけば同じく図-4(d) のオ2降伏  $E-X$  ント  $M_{y2}$  を与え、次式となる。

$$M_{y2} = \frac{1}{16} \{ 9 \sin^{-1} t / t + 9(1-t^2)^{\frac{3}{2}} - 2(1-t^2)^{\frac{3}{2}} \} M_y \quad (10)$$

明らかに  $M_{y1}$  と  $M_{y2}$  とはそれぞれ  $M$  の下界と上界を意味するゆえ式(8)の  $M$  の有効範囲は以下の



とくなる。  $M_{yx} \leq M \leq M_{xy}$  ,  $\sqrt{1-t^2} \leq \phi \leq 1$   $t=1$   $\phi$  は曲げモーメントが単独に作用する降伏曲率

(2) 応力状態 2 (第 2 弾塑性), (図-7 参照) :

図-7 より  $y=0$  ,  $x=x_c$  における応力および歪はそれぞれ降伏応力  $\sigma_y$  および降伏歪  $\epsilon_y$  に等しい。これらに關して次式が成立する。

$$\sigma_y/E = \epsilon_y = \phi \chi_c \quad (11)$$

また図-4(e) の  $\chi_c$  は II.(1) と同様相似条件より

$$\chi_c = \chi_e \sqrt{1-t^2} \quad (12)$$

さらに弾性および塑性領域における応力分布

ならびに弾塑性境界もまた同様にしてそれぞれ次の式で与えられる。

$$\sigma_E = E \phi \chi, \quad \sigma_P = \sigma_y \sqrt{1-t^2(y/a)^2}, \quad \chi^2/(b\phi)^2 + y^2/(at)^2 = 1 \quad (13)$$

よって応力状態 2 に対する曲げ応力分布は図-7(b) のとおり。斜線部は降伏応力  $\sigma_y$  をいふものである。またかかる応力分布によって生ずる断面の曲げモーメント  $M$  は

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} M &= \int_0^a \int_0^x \sigma_E \chi dx dy + \int_0^a \int_x^b \sigma_P \chi dx dy \\ &= \int_0^a \int_0^x E \phi \chi^2 dx dy + \int_0^a \sigma_y \sqrt{1-t^2(y/a)^2} \int_x^b \chi dx dy \end{aligned}$$

上式に式(11), (12), (13)を代入して整理すれば所要のモーメント式を次のようになる。

$$M = (a_1 - a_2(\phi^2)) M_y \quad (14)$$

ここで  $\phi \rightarrow \infty$  とすれば図-4(f) に相当する完全塑性モーメント  $M_{PT}$  が下記の式でえられる。

$$M_{PT} = a_1 M_y = \frac{3}{4} \{ \sqrt{1-t^2} + 2 \ln t/t \} M_y \quad (15)$$

また式(14)の有効範囲は次のとおりである。

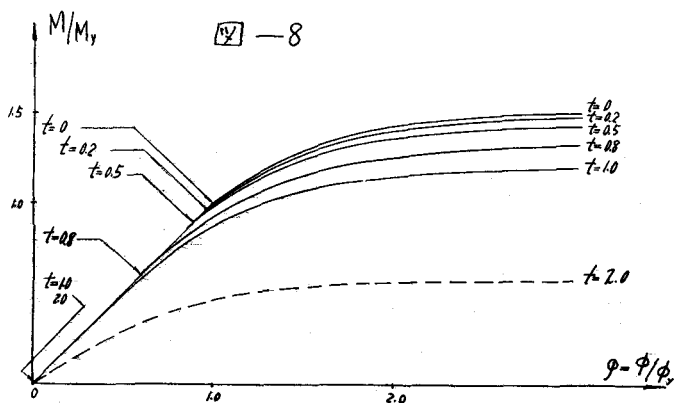
$$M_{yz} \leq M \leq M_{PT} \quad (16)$$

以上から  $M/M_y$  と  $\phi = \phi/\phi_0$  との関係は  $t = \omega/\omega_y$  をパラメータとして図示すれば図-8 のようになり、 $t=0.5$  以上の値に対して弾性限界が著しく低下することが判読される。なお図中の点線で示される曲線は  $\omega/\omega_y$  が 1 を超える弾塑性振りが当初の  $t=1$  の  $M/M_y - \phi$  曲線を表わしたもので、式の誘導はここでは省略した。

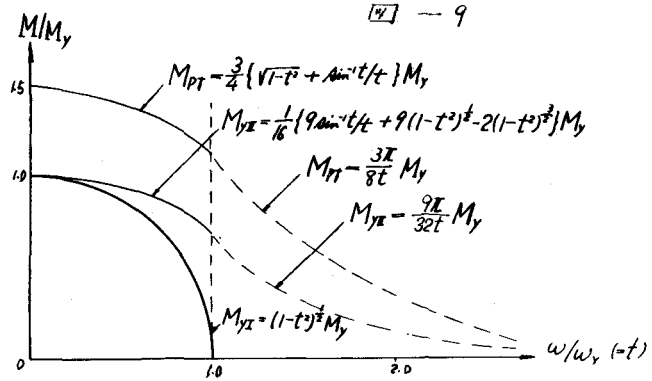
次にそれぞれ式(9), (10)および(11)で定義される第 1 降伏、

第 2 降伏および完全塑性モーメントを同じ  $t = \omega/\omega_y$  をパラメータとして図-9 に示した。  $t \geq 1$  の範囲では  $M_{PT}/M_y$  および  $M_{yz}/M_y$  はともに  $t$  に反比例して減少し

中でも  $M_{PT}$  の値は  $t=1.2$  の近所で降伏モーメント  $M_y$  まで低下することが認められる。



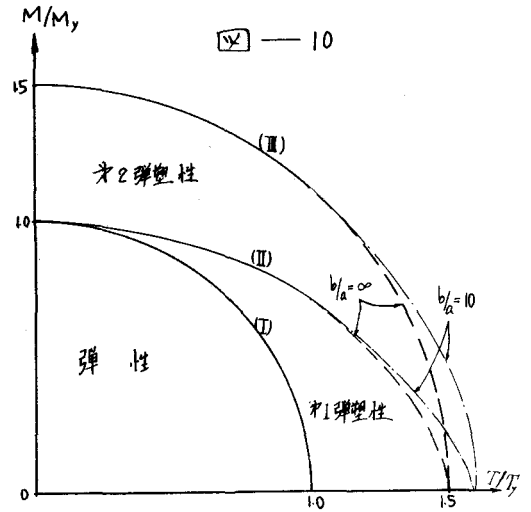
また図-10は  $M$  と  $T$  との相  
関関係を求めたもので、曲線  
①は弾性限界を、曲線④は  
オ1弾塑性とオ2弾塑性との  
境目をそれぞれ表わし、さら  
に曲線③は完全塑性に達した  
ときの  $M$  と  $T$  とのいわゆる相  
互作用曲線をいめるものであ  
る。



ここで Steele<sup>(2)</sup> および山田<sup>(3)</sup> が導いた曲げと捩りを受ける一様矩形断面ばりの  $M$ - $T$  相互作用曲線と曲線③とを比較すれば、両者とも円に非常に近く、 $b/a$  が大きければ曲率も大となるなどの類似点が見られるが、前者は剛塑性体と仮定して最終の完全塑性状態のみに着目した解であり、途中の弾性ならびに弾塑性状態は無視しており、したがって適用範囲はわずかに塑性解析に限られる。

### III 結び

以上の結果を要約すれば、オ1に一定の捩りモーメント  $T$  を受けた一様矩形断面ばりの曲げモーメントと曲率の関係式を完全塑性に達する全段階において求めること、オ2に図-10に示した  $M/M_y$ - $T/T_y$  曲線のうち曲線③は塑性解析に重要な相互作用曲線として使用で



き、さらに曲線①および④はそれぞれ弾塑性解析において必要な境界決定の条件式となりうること、オ3に先に著者らが誘導した曲げに対する補足歪エネルギーの実用式<sup>(4)</sup>と同様な手法で、式(8)および(14)を補足歪エネルギーの一般式  $dU/ds$  に適用すれば、かかる組み合せ応力に対する補足エネルギー法が同様に可能となり立体骨組の弾塑性解析に拡張適用しうることとなる見などが挙げられる。

### (参考文献)

- (1) 山崎、太田、弾塑性捩りの補足エネルギーに対する実用式、第20回鉄学会年次学術講演会講演概要、昭和40年5月
- (2) M.C. Steele, The Plastic Bending and Twisting of Square Section Members, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 3, 1955
- (3) 山田喜昭、塑性力学、日刊工業新聞社、昭和40年1月
- (4) 山崎、太田、塑性解析に拡張したエネルギー法、第19回鉄学会年次学術講演会講演概要、昭和39年5月