

1. 緒言

従来の弾塑性領域における曲げモーメントのみを考慮した矩形ラーメンの解法には、K. H. Gerstle⁽¹⁾や Alfredo Hua-Sing Ang⁽²⁾などのM- Φ 曲線を忠実に取り入れた精密解析および著者らの弾塑性たわみ角式による実用解法などがあるが、本論文では弾塑性領域における軸力の影響を考察するため、曲げモーメントと軸力とを同時に考慮した精密補足歪エネルギー式を導き、これを用いて変形法の基本式を誘導し、もって矩形等断面直線材よりなる多角形状の平面ラーメンを対象として弾塑性解析を行いうるごとくした。その解法骨子は変形法に基づく節点の釣合方程式およびたわみとたわみ角の連続条件式を用いることにより、節点の不静定力を繰り返し試算で算定する。なお座屈による影響は考慮しない。

2. 精密補足歪エネルギー式

弾塑性領域における曲げモーメントと軸力とを考慮したM- Φ 中近似直線より実用補足歪エネルギー式を誘導した報告は別途に行ったが、その適用範囲は軸力を崩壊に至るまで一定とする構造物に限られる。したがってここでは任意の漸増荷重に適用できる精密補足歪エネルギー式をオ1弾塑性およびオ2弾塑性状態にあるそれぞれの応力および歪分布を用いて算定する。すなわち単位長さ当りの補足歪エネルギー式は、一般に $dU/ds = \int \epsilon d\sigma dA$ で与えられるゆえ、それぞれの状態で次のようになる。

オ1弾塑性状態では図-1を用いて次式をうる。

$$\begin{aligned} \frac{dU}{ds} &= \int_0^d \left(\int_0^{\sigma_y} \epsilon d\sigma \right) b dy + \int_d^c \left(\int_0^{\sigma_y} \epsilon d\sigma \right) b dy + \int_0^{h-c} \left(\int_0^{\sigma} \epsilon d\sigma \right) b dy \\ &= \frac{b\sigma_y^2}{6E} \left[3c - 2d + \frac{(h-c)^3}{d^2} \right] \dots (1) \end{aligned}$$

一方曲げモーメントと軸力は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} m &= 3\beta - 3\beta^2 + (3\beta - 3/2)d - d^2 + (1/2 - 3\beta^2/2 + \beta^3)/d \\ n &= \{ 2\alpha\beta - \alpha^2 - (1 - \beta^2) \} / 2d \end{aligned} \right\} (2)$$

ここに $m = M/M_y$, $n = N/N_y$, $\alpha = d/h$, $\beta = c/h$

$M_y = b h^2 \sigma_y / 6$ (降伏曲げモーメント), b : 矩形断面巾

$N_y = b h \sigma_y$ (降伏軸力), σ_y : 降伏応力

よって式(2)より β を消去して

$$2\alpha = \frac{[3(1-n)-m]^2}{4(1-n)^3} \dots (3)$$

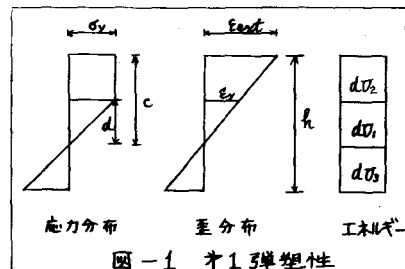


図-1 オ1弾塑性

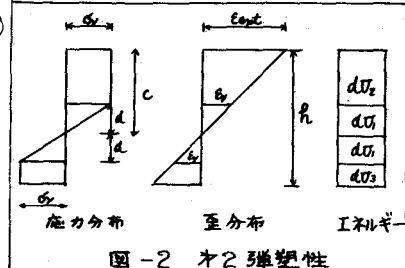


図-2 オ2弾塑性

式(1)に式(2)および式(3)を代入すれば所要のエネルギー式は m と n の函数となる。

$$\frac{dU}{ds} = \frac{M_y^2}{2EI} \left[\frac{8(1-n)^3}{3(1-n)-m} + 3(2n-1) \right] \dots (1')$$

才2弾塑性状態に対しても図-2を用いて次式をうる。

$$\frac{dU}{ds} = 2 \int_0^d \left(\int_0^s \epsilon ds \right) b dy + \int_0^c \left(\int_0^s \epsilon ds \right) b dy + \int_0^{k-c} \left(\int_0^s \epsilon ds \right) b dy = \frac{b \phi_s^2}{6E} (3k-4d) \quad \dots (4)$$

また曲げモーメント $m = 6\beta - 6\beta^2 - 2d^2$ ，軸力 $n = 2\beta - 1$ より $2d = \sqrt{3-3n^2-2m} \dots (5)$

式(5)を式(4)に代入すれば才2弾塑性状態におけるエネルギー式が次のごとくえられる。

$$\frac{dU}{ds} = \frac{M_y^2}{2EI} \left[3 - 2\sqrt{3-3n^2-2m} \right] \quad \dots (4')$$

したがって弾塑性領域にわたる所要の精密補足歪エネルギー式は式(1)および式(4)に弾性エネルギーを加味して次式であらわされる。

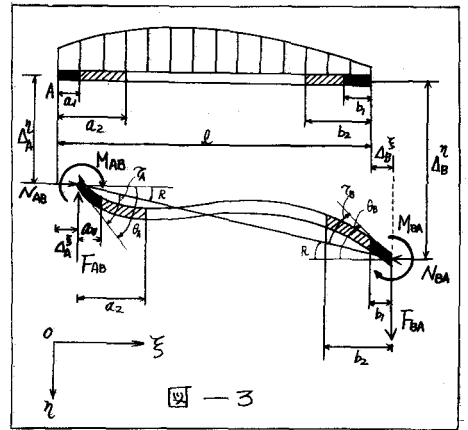
$$U = \frac{M_y^2}{2EI} \int_E (m^2 + 3n^2) ds + \frac{M_y^2}{2EI} \int_{P_1} \left\{ \frac{8(1-n)^3}{3(1-n)-m} + 3(2n-1) \right\} ds + \frac{M_y^2}{2EI} \int_{P_2} (3 - 2\sqrt{3-3n^2-2m}) ds \quad \dots (6)$$

ここに積分記号の添字 E, P_1 , P_2 はそれぞれ部材の弾性, 才1弾塑性, 才2弾塑性の長さを示すものとする。

3. 基本式の誘導

平面ラーメンの任意の位置にある弾塑性部材 AB を考え、図-3のごとく流動座標 ξ - η 軸をとり、A, B 両端より a_1 , つづいて a_2 まで、 b_1 , つづいて b_2 までそれぞれ才2弾塑性領域および才1弾塑性領域が生ずるものとするれば、補足歪エネルギー式は式(6)より次式となる。

$$U = \left[\int_0^{a_0} (3 - \sqrt{3-3n^2-2m}) d\xi + \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \frac{8(1-n)^3}{3(1-n)-m} + 3(2n-1) \right\} d\xi \right. \\ \left. + \int_{a_2}^{l-b_2} (m^2 + 3n^2) d\xi + \int_{l-b_1}^{l-b_2} \left\{ \frac{8(1-n)^3}{3(1-n)-m} + 3(2n-1) \right\} d\xi \right. \\ \left. + \int_{l-b_1}^l (3 - \sqrt{3-3n^2-2m}) d\xi \right] \frac{M_y^2}{2EI} \quad \dots (7)$$



いま AB 材が変形して釣合状態にあるものとするれば、任意点の曲げモーメントおよび軸力は次式であたえられる。

$$M = F_{AB} \xi + M_{AB} + M_0(\xi), \quad N = N_{AB} \quad \dots (8)$$

たゞし $F_{AB} = -(M_{AB} + M_{BA})/l$ ， $M_0(\xi)$ は AB 材を単独ばりで見做したときの荷重による任意点の曲げモーメントを示す。

式(7)に式(8)を代入して変分原理を適用すれば、両端 A, B における切線角 τ_A , τ_B および部材伸縮 Δl が求まり、 $\tau_A = \theta_A - R$, $\tau_B = \theta_B - R$ に置換して次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_A - R &= D_{AB} \\ \theta_B - R &= G_{AB} \\ \Delta l &= L_{AB} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに式(9)の D_{AB} , G_{AB} , L_{AB} はそれぞれ A 点の端モーメント M_{AB} , せん断力 F_{AB} , 軸力 N_{AB} , さらに弾塑性領域のパラメータ a_1 , a_2 , b_1 , b_2 の函数で表-1 のごとき内容をもつた, これらは Simpson 公式により数値積分を行うものとする。

また前記した m , n は式(8)の M および N をそれぞれ M_y および N_y で除した値に変わる。

式(9)の R および Δl をそれぞれ両端の垂直および水平変位に変換したのち, 流動座標 $\xi - \eta$ に対する方向余弦がそれぞれ α_1 , β_1 および α_2 , β_2 であるとき固定座標 $x-y$ 軸に座標変換を行えば, 変位および力は次のごとく示される。

$$\left. \begin{aligned} R &= (\Delta_B^x - \Delta_A^x) / l \\ \Delta l &= (\Delta_B^y - \Delta_A^y) \\ \Delta^x &= \alpha_1 \Delta^x + \alpha_2 \Delta^x \\ \Delta^y &= \beta_1 \Delta^x + \beta_2 \Delta^x \\ N_{AB}^x &= \alpha_1 N_{AB}^x + \alpha_2 F_{AB}^y \\ F_{AB}^x &= \beta_1 N_{AB}^x + \beta_2 F_{AB}^y \end{aligned} \right\} (10)$$

式(9)に式(10)を代入し, N_{AB}^x , F_{AB}^x , Δ^x , Δ^y の代りに H_{AB} , V_{AB} , x , y を用いるものとし, 節 A に注目すれば固定座標 $x-y$ 軸に対する所要の変形法の基本式が次式であたえられる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= D_{AB} - G_{AB} + \theta_B \\ x_A &= (\alpha_2 G_{AB} + \beta_2 L_{AB} - \alpha_1 \theta_B) / (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) + x_B \\ y_A &= (-\alpha_1 G_{AB} - \beta_1 L_{AB} + \alpha_1 \theta_B) / (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) + y_B \end{aligned} \right\} (11)$$

ここに D_{AB} , G_{AB} , L_{AB} はそれぞれ M_{AB} , H_{AB} , V_{AB} , α_1 , α_2 , β_1 , β_2 の函数に変わる。

5. 多角形平面ラーメンの弾塑性解析法

上記誘導の弾塑性領域を考慮した変形法の基本式を用うれば, 図-4 に示すごとき多角形平面ラーメンの弾塑性解析が可能となる。

すなわち節 A における曲げモーメントおよび力の釣合より次式をうる。

$$M_{i1} + M_{i2} + \dots + M_{in} = 0, \quad H_{i1} + H_{i2} + \dots + H_{in} = 0, \quad V_{i1} + V_{i2} + \dots + V_{in} = 0 \quad (12)$$

ここに M_i^e , H_i^e , V_i^e はそれぞれ節 A に作用する外力によるモーメントおよび x , y 方向の成分である。

またたわみ角およびたわみの連続条件より次式が成立する。

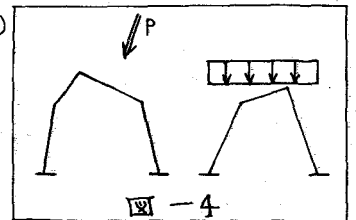
$$\theta_{i1} = \theta_{i2} = \dots, \quad x_{i1} = x_{i2} = \dots, \quad y_{i1} = y_{i2} = \dots \quad (13)$$

表 - 1	
D_{AB}	$\int_0^{a_1} \phi_{r_2} \left(\frac{l-\xi}{l} \right) d\xi + \int_{a_1}^{a_2} \phi_{r_1} \left(\frac{l-\xi}{l} \right) d\xi + \int_{a_2}^{l-b_1} \phi_E \left(\frac{l-\xi}{l} \right) d\xi + \int_{l-b_1}^l \phi_{r_1} \left(\frac{l-\xi}{l} \right) d\xi + \int_{l-b_1}^l \phi_{r_2} \left(\frac{l-\xi}{l} \right) d\xi$
G_{AB}	$\int_0^{a_1} \phi_{r_2} \left(-\frac{\xi}{l} \right) d\xi + \int_{a_1}^{a_2} \phi_{r_1} \left(-\frac{\xi}{l} \right) d\xi + \int_{a_2}^{l-b_1} \phi_E \left(-\frac{\xi}{l} \right) d\xi + \int_{l-b_1}^l \phi_{r_1} \left(-\frac{\xi}{l} \right) d\xi + \int_{l-b_1}^l \phi_{r_2} \left(-\frac{\xi}{l} \right) d\xi$
L_{AB}	$3 \int_0^{a_1} \phi_{r_2} k_n d\xi + \int_{a_1}^{a_2} k_n \phi_{r_1} \cdot f d\xi + 3 \int_{a_2}^{l-b_1} k_n d\xi + \int_{l-b_1}^l k_n \phi_{r_1} \cdot f d\xi + 3 \int_{l-b_1}^l \phi_{r_1} k_n d\xi + 3 f e (a_2 - a_1 + b_2 - b_1)$

上記の ϕ_E , ϕ_{r_1} , ϕ_{r_2} はそれぞれ弾性, 1弾塑性, 2弾塑性の曲率を示し, また f は次式となる。 $k_n = M_y / N_y$

$$\phi_E = \frac{M_y}{EI} m, \quad \phi_{r_1} = \frac{M_y}{EI} \cdot \frac{4(1-n)^3}{[3(1-n)-m]^2}$$

$$\phi_{r_2} = \frac{M_y}{EI} \cdot \frac{1}{\sqrt{3-3n^2-2m}}, \quad f = -\frac{2(1-n)-m}{(1-n)}$$



よって式(2)および式(3)が節点に集まる不静定力 $M_{i1}, M_{i2}, \dots, H_{i1}, H_{i2}, \dots, V_{i1}, V_{i2}, \dots$ に対応し、かつそれぞれの節点でこれが成立することになる。

さらに弾塑性領域未知数としての a_1 および a_2 などに対しては弾塑性境界条件からえられることになる。すなわち弾性と才1弾塑性状態との境界は式(2)で $\alpha = \beta$ より $m = 1 - n \dots (4)$

また才1と才2弾塑性状態の境界は式(2)と式(5)で $\alpha = 1 - \beta$ より $m = 1 + n - 2n^2 \dots (15)$

才2弾塑性状態の極限としての完全塑性の場合は式(5)で $\alpha = 0$ より $m = 3(1 - n^2)/2 \dots (16)$

したがって式(8)と式(4)および式(5)より弾塑性境界としての適合条件式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{M(a_2)}{M_y} &= [F_{AB} a_2 + M_{AB} + M_o(a_2)] \frac{1}{M_y} = 1 - \frac{N_{AB}}{N_y} \\ \frac{M(a_1)}{M_y} &= [F_{AB} a_1 + M_{AB} + M_o(a_1)] \frac{1}{M_y} = 1 + \frac{N_{AB}}{N_y} - 2 \left(\frac{N_{AB}}{N_y} \right)^2 \end{aligned} \right\} (17)$$

以上で未知数と同数の条件式をうることになるが、その算法は逐次近似法を必要とする。

6. 例題

図-5に示す非対称山形ラーメンのB点に集中荷重Pが作用した場合の解法は次のごとくである。

まず両端固定条件より

$$x_{AB} = y_{AB} = \theta_{AB} = 0, \quad x_{CB} = y_{CB} = \theta_{CB} = 0$$

ついで節点Bに注目してBA材の基本式は式(11)より

$$\theta_{BA} = D_{BA} - G_{BA}$$

$$x_{BA} = -\sin \mu_{AB} G_{BA} + \cos \mu_{AB} L_{BA}$$

$$y_{BA} = -\cos \mu_{AB} G_{BA} - \sin \mu_{AB} L_{BA}$$

同様にBC材の基本式は式(11)を用いて次式をうる。

$$\theta_{BC} = D_{BC} - G_{BC}, \quad x_{BC} = -\sin \mu_{BC} G_{BC} - \cos \mu_{BC} L_{BC}, \quad y_{BC} = \cos \mu_{BC} G_{BC} - \sin \mu_{BC} L_{BC}$$

これらを式(3)に代入すれば次の連立方程式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} D_{BA} - G_{BA} - D_{BC} + G_{BC} &= 0 \\ \sin \mu_{AB} G_{BA} - \cos \mu_{AB} L_{BA} - \sin \mu_{BC} G_{BC} - \cos \mu_{BC} L_{BC} &= 0 \\ \cos \mu_{AB} G_{BA} + \sin \mu_{AB} L_{BA} + \cos \mu_{BC} G_{BC} - \sin \mu_{BC} L_{BC} &= 0 \end{aligned} \right\} (18)$$

しかるに式(12)より M_{BC}, H_{BC}, V_{BC} はそれぞれ M_{BA}, H_{BA}, V_{BA} およびPに置換され、また塑性領域未知数は式(17)を用いて同じく M_{BA}, H_{BA}, V_{BA} に換算されるゆえ、結局未知数 M_{BA}, H_{BA}, V_{BA} が式(8)を満足するごとく繰り返し試算により算定される。

7. 結語 本論文は弾塑性領域における曲げモーメントと軸力とを考慮した精密補足歪エネルギーを算定して任意漸増荷重に適用しうるごとくし、これを用いて変形法の基本式を誘導し、多角形平面ラーメンの弾塑性解析と数値積分に基づく逐次近似法により可能ならしめたものである。

(文献) 1) K.H. Gurtel: Deflection of Structures in the Inelastic Range, Mech. Div. A.S.C.E., Vol.83, 1957,

2) Alfredo Hua-Sing Any: Analysis of Frames with Nonlinear Behavior, Trans. A.S.C.E., Vol.126, 1961

3) 山崎, 石川: 弾塑性領域を考慮したエネルギー法による直線材にわみ角式の誘導, 昭和三十八年度土木学会西部支部研究発表会論文集

4) 山崎, 石川, 北島: 軸力と曲げの組合せ軸力に対する補足エネルギー, 昭和40年度土木学会西部支部研究発表会論文集

