

II - 12 たわみ角・端モーメント関係式による、一方向連続扇形平板の解法について

九州大学 教授 山崎徳也

助手 橋本 武

学生 ○松本篤武

1. まえがき 扇形平板は、半径の異なる二個の同心円と、その中心を通る二直線で構成され(図-1参照)高架橋や地下道等の曲線部に多く利用されているが、その理論研究は、曲線直交異方性扇形平板の曲げに関する、芳村氏の論文⁽¹⁾があるにすぎない。

本論文は図-1に示すごとく、一方向(半径方向)に連続する等方性等断面扇形平板の解法を示すもので、芳村氏の論文を、連続扇形平板に応用拡張したものである。

2. 連続扇形平板の解法

(1). たわみ角・端モーメント関係式の誘導

図-2に示す扇形平板において、半径方向を r 軸、回転方向を θ 軸、紙面に直交して z 軸を持つ極座標を導入し扇形平板の z 軸方向のたわみを w とすれば、等方性等断面扇形平板の基礎微分方程式、および r 、 θ それぞれの方向の曲げモーメント M_r 、 M_θ 、反力 V_r 、 V_θ は、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{4}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= \frac{p(r, \theta)}{D} \\ M_r &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} \\ M_\theta &= -D \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\} \\ V_r &= -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + (2-\nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} \\ V_\theta &= -D \left\{ \frac{(2-\nu)}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{(1-\nu^2)}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^3} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし、 $p(r, \theta)$ ：扇形平板に作用する任意垂直荷重の荷重強度

D ：板剛度($E h^3 / 12(1-\nu^2)$)、 E ：板の弾性係数、 h ：板厚、 ν ：板のポアソン比

式(1)を満足する w の一般解は、特殊解を w_0 、余函数を w_1 とすれば、 $w = w_0 + w_1$ -----(2)で表わされる。 w_1 は一般に r 、 θ の函数であり、これを $w_1 = R(r) \Theta(\theta)$ なる変数分離型に仮定する。図-2に示す扇形平板は、辺 AD 、 BC で単純支持されているから、 θ 方向の境界条件は次の通りである。 $\theta = 0, \alpha$ でそれぞれ $w = 0$ $M_\theta = 0$ -----(3)

これまで、平面板の理論において用いられたごとく、式(3)を満足する $\Theta(\theta)$ として正弦三角函数を用いれば、 w_1 は次式で与えられる。 $w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta$ -----(4)

式(4)を式(1)の齊次方程式に代入すれば $R_n(r)$ が求まり、次のごとくなる。

$$R_n(r) = A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} + B_n r^{-\frac{n\pi}{\alpha}} + C_n r^{2+\frac{n\pi}{\alpha}} + D_n r^{2-\frac{n\pi}{\alpha}} \quad (5)$$

$$\text{また特殊解 } w_0 \text{ を } w_0 = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \quad (6)$$

と仮定し、かつ荷重強度 $p(r, \theta)$ を θ に関して、正弦Fourier級数により近似すれば

$$p(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta, \quad \text{ただし } f_n = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha p(r, \theta) \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta d\theta \quad (7)$$

式(6), (7)を式(1)に代入し $F_n(r)$ をうる。

$$F_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n r^{\alpha} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta}{\left\{16 - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right\} \left\{4 - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right\}} \quad \text{--- (8)}$$

以上式(4), (5), (6), (8)より式(1)の一般解は、次のごとくえられる。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} + B_n r^{-\frac{n\pi}{\alpha}} + C_n r^{2+\frac{n\pi}{\alpha}} + D_n r^{2-\frac{n\pi}{\alpha}} \right\} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta + F_n(r) \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \quad \text{--- (9)}$$

さて連続板を解くために、図-2に示すごとく、荷重および端モーメントが扇形平板に作用する際の、たわみ角と端モーメントとの関係式を求める必要がある。図-2の境界条件は、 θ 方向に関しては式(3)の通りであり式(9)はこれらを満足する。また r 方向に関しては、図より明らかなごとく次式となる。

$$\left. \begin{aligned} r = r_1 \text{ で } \quad w &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_1 \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta, \quad M_r = \sum_{n=1}^{\infty} M_{r1} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \\ r = r_2 \text{ で } \quad w &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_2 \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta, \quad M_r = - \sum_{n=1}^{\infty} M_{r2} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (10)}$$

式(10)を連立に解くことにより、式(9)に含まれる積分定数 A_n, B_n, C_n, D_n が求まる。

$$A_n = \frac{2}{E} \left[R_1 r_1 Y_2 \left\{ F_n^{(2)}(r_1) Y_2 + \nu F_n^{(1)}(r_1) + \frac{M_{r1} r_1}{D} Y_2 \right\} \left\{ (2\alpha n - 1 - \nu) Y_1^2 (R_1^2 - R_2^2) + (3 + \nu) \alpha_n R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. - R_1 r_1 Y_2 \left\{ F_n^{(2)}(r_2) Y_2 + \nu F_n^{(1)}(r_2) - \frac{M_{r2} r_2}{D} Y_2 \right\} \left\{ (2\alpha n - 1 - \nu) Y_1^2 (R_1^2 - R_2^2) + (3 + \nu) \alpha_n R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. - F_n(r_1) R_1 Y_2^2 \left\{ (\alpha n + 2)(\alpha n + 1 + \nu)(2\alpha n - 1 - \nu) Y_1^2 (R_1^2 - R_2^2) + (3 + \nu) \alpha_n^2 (\alpha n + 1 - \nu) R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. + F_n(r_2) R_1 Y_1^2 \left\{ (\alpha n + 2)(\alpha n + 1 + \nu)(2\alpha n - 1 - \nu) Y_2^2 (R_1^2 - R_2^2) + (3 + \nu) \alpha_n^2 (\alpha n + 1 - \nu) R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. + (\alpha n + 1) \delta_1 R_1 Y_2 \left[(2\alpha n - 1 - \nu) \{ (1 - \nu) \alpha_n + 2(1 + \nu) \} Y_1^2 (R_1^2 - R_2^2) + (3 + \nu)(1 - \nu) \alpha_n^2 R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right] \right. \\ \left. - (\alpha n + 1) \delta_2 R_1 Y_1^2 \left[(2\alpha n - 1 - \nu) \{ (1 - \nu) \alpha_n + 2(1 + \nu) \} Y_2^2 (R_1^2 - R_2^2) + (3 + \nu)(1 - \nu) \alpha_n^2 R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right] \right] \right]$$

$$B_n = \frac{2}{E} \left[R_1 R_2 Y_2^2 \left\{ F_n^{(2)}(r_1) Y_1 + \nu F_n^{(1)}(r_1) + \frac{M_{r1} r_1}{D} Y_1 \right\} \left\{ (2\alpha n + 1 + \nu) Y_1^2 (R_1^2 - R_2^2) - (3 + \nu) \alpha_n R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. - R_1 R_2 Y_1^2 \left\{ F_n^{(2)}(r_2) Y_2 + \nu F_n^{(1)}(r_2) - \frac{M_{r2} r_2}{D} Y_2 \right\} \left\{ (2\alpha n + 1 + \nu) Y_2^2 (R_1^2 - R_2^2) - (3 + \nu) \alpha_n R_2^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. - F_n(r_1) R_1 Y_2^2 R_2^2 \left\{ (\alpha n - 2)(\alpha n - 1 - \nu)(2\alpha n + 1 + \nu) Y_1^2 (R_1^2 - R_2^2) - (3 + \nu) \alpha_n^2 (\alpha n - 1 - \nu) R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. + F_n(r_2) R_1 Y_1^2 R_2^2 \left\{ (\alpha n - 2)(\alpha n - 1 - \nu)(2\alpha n + 1 + \nu) Y_2^2 (R_1^2 - R_2^2) - (3 + \nu) \alpha_n^2 (\alpha n - 1 - \nu) R_2^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. + (\alpha n - 1) \delta_1 R_1 Y_2^2 R_2^2 \left[(2\alpha n + 1 + \nu) \{ (1 - \nu) \alpha_n - 2(1 + \nu) \} Y_1^2 (R_1^2 - R_2^2) - (3 + \nu)(1 - \nu) \alpha_n^2 R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right] \right. \\ \left. - (\alpha n - 1) \delta_2 R_1 Y_1^2 R_2^2 \left[(2\alpha n + 1 + \nu) \{ (1 - \nu) \alpha_n - 2(1 + \nu) \} Y_2^2 (R_1^2 - R_2^2) - (3 + \nu)(1 - \nu) \alpha_n^2 R_2^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right] \right] \right]$$

$$C_n = \frac{2}{E} \left[-R_1 Y_1 \left\{ F_n^{(2)}(r_1) Y_1 + \nu F_n^{(1)}(r_1) + \frac{M_{r1} r_1}{D} Y_1 \right\} \left\{ (2\alpha n - 1 - \nu) Y_1^2 (R_1^2 - R_2^2) - (1 - \nu) \alpha_n R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. + R_2 Y_2 \left\{ F_n^{(2)}(r_2) Y_2 + \nu F_n^{(1)}(r_2) - \frac{M_{r2} r_2}{D} Y_2 \right\} \left\{ (2\alpha n - 1 - \nu) Y_1^2 (R_1^2 - R_2^2) - (1 - \nu) \alpha_n R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. + \alpha_n F_n(r_1) R_1 \left\{ (\alpha n - 1 + \nu)(2\alpha n - 1 - \nu) Y_2^2 (R_1^2 - R_2^2) - (1 - \nu)(\alpha n - 2)(\alpha n - 1 - \nu) R_2^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. - \alpha_n F_n(r_2) R_2 \left\{ (\alpha n - 1 + \nu)(2\alpha n - 1 - \nu) Y_1^2 (R_1^2 - R_2^2) - (1 - \nu)(\alpha n - 2)(\alpha n - 1 - \nu) R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. - \alpha_n (\alpha n - 1) (1 - \nu) \delta_1 R_1 \left[(2\alpha n - 1 - \nu) Y_2^2 (R_1^2 - R_2^2) - \{ (1 - \nu) \alpha_n - 2(1 + \nu) \} R_2^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right] \right. \\ \left. + \alpha_n (\alpha n - 1) (1 - \nu) \delta_2 R_2 \left[(2\alpha n - 1 - \nu) Y_1^2 (R_1^2 - R_2^2) - \{ (1 - \nu) \alpha_n - 2(1 + \nu) \} R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right] \right] \right]$$

$$D_n = \frac{2}{E} \left[-R_1 R_2 Y_1 \left\{ F_n^{(2)}(r_1) Y_1 + \nu F_n^{(1)}(r_1) + \frac{M_{r1} r_1}{D} Y_1 \right\} \left\{ (2\alpha n + 1 + \nu) Y_2^2 (R_1^2 - R_2^2) + \alpha_n (1 - \nu) R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. + R_1 R_2 Y_2 \left\{ F_n^{(2)}(r_2) Y_2 + \nu F_n^{(1)}(r_2) - \frac{M_{r2} r_2}{D} Y_2 \right\} \left\{ (2\alpha n + 1 + \nu) Y_1^2 (R_1^2 - R_2^2) + \alpha_n (1 - \nu) R_2^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. + \alpha_n F_n(r_1) R_1 R_2^2 \left\{ (\alpha n + 1 - \nu)(2\alpha n + 1 + \nu) Y_2^2 (R_1^2 - R_2^2) + (1 - \nu)(\alpha n + 2)(\alpha n + 1 + \nu) R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. - \alpha_n F_n(r_2) R_2 R_1^2 \left\{ (\alpha n + 1 - \nu)(2\alpha n + 1 + \nu) Y_1^2 (R_1^2 - R_2^2) + (1 - \nu)(\alpha n + 2)(\alpha n + 1 + \nu) R_2^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right\} \right. \\ \left. - (1 - \nu) \alpha_n (\alpha n + 1) \delta_1 R_1 R_2^2 \left[(2\alpha n + 1 + \nu) Y_2^2 (R_1^2 - R_2^2) + \{ (1 - \nu) \alpha_n + 2(1 + \nu) \} R_1^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right] \right. \\ \left. + (1 - \nu) \alpha_n (\alpha n + 1) \delta_2 R_2 R_1^2 \left[(2\alpha n + 1 + \nu) Y_1^2 (R_1^2 - R_2^2) + \{ (1 - \nu) \alpha_n + 2(1 + \nu) \} R_2^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \right] \right] \right]$$

ただし、 $R = r^{\frac{n\pi}{\alpha}}$, $\alpha_n = \frac{n\pi}{\alpha}$, $E' = 4 \{ (2\alpha n + 1 + \nu)(2\alpha n - 1 - \nu) Y_1^2 Y_2^2 (R_1^2 - R_2^2) - (1 - \nu)(3 + \nu) \alpha_n^2 R_1^2 R_2^2 (Y_1^2 - Y_2^2) \}$
 $F_n^{(1)}(r), F_n^{(2)}(r)$ は、 $F_n(r)$ をそれぞれ 1 回および 2 回微分し E で割る。

式(11)を式(9)に代入すればたわみ曲面がえられ、 r, θ で一回偏微分して、それぞれの方角のたわみ角を求める。他方 $r = r_1, r_2$ におけるたわみ角を θ_{r1}, θ_{r2} とし θ に関する正弦 Fourier 級数で近似すれば、次式が成立する。

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=r_1} = \theta_{r1} = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{r1n} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=r_2} = \theta_{r2} = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{r2n} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \quad \text{--- (12)}$$

式(12)より、はり理論におけるたわみ角式に類似した、扇形平板のたわみ角・端モーメント関係式が、次のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} M_{r1n} &= \frac{D[-(C_1 A_2 + D_2 B_1) F_n(r_1) + (D_1 A_2 + C_2 B_1) F_n(r_2) + (F_1 A_2 + G_2 B_1) \delta_1 - (G_1 A_2 + F_2 B_1) \delta_2 + E\{A_2 F_n^{(0)}(r_1) + B_1 F_n^{(0)}(r_2) - A_2 \theta_{r1n} - B_1 \theta_{r2n}\}]}{r_1 (A_1 A_2 - B_1 B_2)} \\ &\quad - D\{F_n^{(0)}(r_1) + \nu F_n^{(0)}(r_1)/r_1\} \\ M_{r2n} &= \frac{D[(C_1 B_2 + D_2 A_1) F_n(r_1) - (D_1 B_2 + C_2 A_1) F_n(r_2) - (F_1 B_2 + G_2 A_1) \delta_1 + (G_1 B_2 + F_2 A_1) \delta_2 - E\{B_2 F_n^{(0)}(r_1) + A_1 F_n^{(0)}(r_2) - B_2 \theta_{r1n} - A_1 \theta_{r2n}\}]}{r_2 (A_1 A_2 - B_1 B_2)} \\ &\quad + D\{F_n^{(0)}(r_2) + \nu F_n^{(0)}(r_2)/r_2\} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (13)}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし} \quad A_1 &= r_1^2 r_2^2 (R_1^2 - R_2^2) \{ (2\alpha n - 1 - \nu) R_1^2 + (2\alpha n + 1 + \nu) R_2^2 \} - R_1^2 R_2^2 (r_1^2 - r_2^2) \alpha_n^2 \{ (1 - \nu) r_1^2 + (3 + \nu) r_2^2 \} \\ A_2 &= r_1^2 r_2^2 (R_1^2 - R_2^2) \{ (2\alpha n - 1 - \nu) R_1^2 + (2\alpha n + 1 + \nu) R_2^2 \} - R_1^2 R_2^2 (r_1^2 - r_2^2) \alpha_n^2 \{ (1 - \nu) r_1^2 + (3 + \nu) r_2^2 \} \\ B_1 &= B_2 = 2\alpha n r_1 R_1 R_2 \{ \alpha_n (r_1^2 - r_2^2) (R_1^2 + R_2^2) - (r_1^2 + r_2^2) (R_1^2 - R_2^2) \} \\ C_1 &= \frac{\alpha_n}{r_1} [r_1^2 r_2^2 (R_1^2 - R_2^2) \{ (\alpha_n + 2)(2\alpha n - 1 - \nu) R_1^2 + (\alpha_n - 2)(2\alpha n + 1 + \nu) R_2^2 \} + R_1^2 R_2^2 (r_1^2 - r_2^2) \alpha_n \{ (\alpha_n + 2)(\alpha_n - 2)(1 - \nu) r_1^2 + (3 + \nu) \alpha_n^2 r_2^2 \}] \\ C_2 &= \frac{\alpha_n}{r_2} [r_1^2 r_2^2 (R_1^2 - R_2^2) \{ (\alpha_n + 2)(2\alpha n + 1 + \nu) R_1^2 + (\alpha_n - 2)(2\alpha n - 1 - \nu) R_2^2 \} + R_1^2 R_2^2 (r_1^2 - r_2^2) \alpha_n \{ (\alpha_n + 2)(\alpha_n - 2)(1 - \nu) r_1^2 + (3 + \nu) \alpha_n^2 r_2^2 \}] \\ D_1 &= 2\alpha n r_1 R_1 R_2 [(R_1^2 + R_2^2) (r_1^2 - r_2^2) \alpha_n (\alpha_n^2 - 1 + \nu) - (R_1^2 - R_2^2) \{ \nu \alpha_n^2 r_1^2 - (2\alpha_n^2 + \nu \alpha_n^2 - 2 - 2\nu) r_2^2 \}] \\ D_2 &= 2\alpha n r_2 R_1 R_2 [(R_1^2 + R_2^2) (r_1^2 - r_2^2) \alpha_n (\alpha_n^2 - 1 + \nu) - (R_1^2 - R_2^2) \{ \nu \alpha_n^2 r_2^2 - (2\alpha_n^2 + \nu \alpha_n^2 - 2 - 2\nu) r_1^2 \}] \\ F_1 &= \frac{\alpha_n}{r_1} [R_1^2 (\alpha_n + \nu \alpha_n + 2)(2\alpha n - 1 - \nu) + R_2^2 (\alpha_n + \nu \alpha_n - 2)(2\alpha n + 1 + \nu)] r_1^2 (R_1^2 - R_2^2) + \alpha_n (1 - \nu) R_1^2 R_2^2 (r_1^2 - r_2^2) \{ (\alpha_n^2 - \nu \alpha_n - 4) r_1^2 + \alpha_n^2 (3 + \nu) r_2^2 \} \\ F_2 &= \frac{\alpha_n}{r_2} [R_2^2 (\alpha_n + \nu \alpha_n + 2)(2\alpha n - 1 - \nu) + R_1^2 (\alpha_n + \nu \alpha_n - 2)(2\alpha n + 1 + \nu)] r_2^2 (R_1^2 - R_2^2) + \alpha_n (1 - \nu) R_1^2 R_2^2 (r_1^2 - r_2^2) \{ (\alpha_n^2 - \nu \alpha_n - 4) r_2^2 + \alpha_n^2 (3 + \nu) r_1^2 \} \\ G_1 &= 2\alpha n r_1 R_1 R_2 (\alpha_n - 1) (\alpha_n + 1) \{ (1 - \nu) \alpha_n (R_1^2 + R_2^2) (r_1^2 - r_2^2) + 2(1 + \nu) r_1^2 (R_1^2 - R_2^2) \} \\ G_2 &= 2\alpha n r_2 R_1 R_2 (\alpha_n - 1) (\alpha_n + 1) \{ (1 - \nu) \alpha_n (R_1^2 + R_2^2) (r_1^2 - r_2^2) + 2(1 + \nu) r_2^2 (R_1^2 - R_2^2) \} \\ E &= (2\alpha n + 1 + \nu)(2\alpha n - 1 - \nu) r_1^2 r_2^2 (R_1^2 - R_2^2) - (1 - \nu)(3 + \nu) \alpha_n^2 R_1^2 R_2^2 (r_1^2 - r_2^2) \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (14)}$$

(2). 特殊解について 扇形平板に作用する任意垂直荷重 $p(r, \theta)$ を、もし r, θ に関して二重正弦 Fourier 級数展開すれば、集中荷重をはじめ任意垂直荷重を取り扱ううえには便利であるが、特殊解 w_0 は、式(1)に $p(r, \theta)$ の二重 Fourier 級数展開式を直接代入して求めることが不可能であるから、式(7)に示すごとく、Fourier 単級数展開式を用いた次第である。したがって式(7)の使用は、 $p(r, \theta)$ が r に関して連続である場合に制限される。

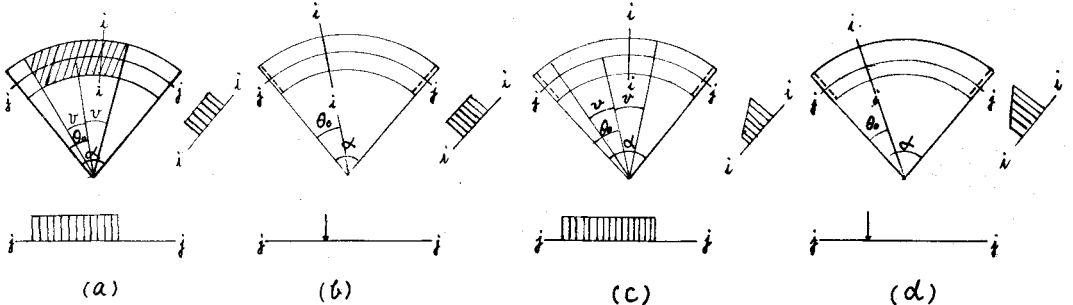


図 - 3

図-3 はその例で、式(8)に示す $F_n(r)$ をそれぞれの場合に求めれば、次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \text{a) 部分等分布荷重の場合。} \quad (r_1 \leq r \leq r_2) \quad F_n(r) &= \frac{4P_0 r_1^2 \frac{n\pi}{\alpha}}{\{16 - \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}\} \{4 - \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}\}} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \nu \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \\ p(r) &= p_0 \quad (\theta_0 - \nu \leq \theta \leq \theta_0 + \nu) \\ p(r) &= 0 \quad (0 \leq \theta < \theta_0 - \nu, \quad \theta_0 + \nu < \theta \leq \alpha) \end{aligned} \right\}$$

6) r 方向等線荷重の場合

$$p(r) = p_0 \quad (0 = \theta_0, r_1 \leq r \leq r_2)$$

$$F_n(r) = \frac{2p_0 r^4 / \alpha}{\left\{16 - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right\} \left\{4 - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right\}} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta_0$$

c) r 方向等変分布荷重の場合

$$p(r) = k_1 r + k_2 \quad (0_0 - r \leq \theta \leq 0_0 + r, r_1 \leq r \leq r_2)$$

$$F_n(r) = \frac{4r^4}{n\pi} \left[\frac{k_1 r}{\left\{25 - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right\} \left\{9 - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right\}} + \frac{k_2}{\left\{16 - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right\} \left\{4 - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right\}} \right] \sin \frac{n\pi r}{\alpha} \sin \frac{n\pi \theta_0}{\alpha}$$

d) r 方向等変線荷重の場合

$$p(r) = K_1 r + K_2 \quad (\theta = \theta_0, r_1 \leq r \leq r_2)$$

$$F_n(r) = \frac{2r^4}{\alpha} \left[\frac{K_1 r}{\left\{25 - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right\} \left\{9 - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right\}} + \frac{K_2}{\left\{16 - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right\} \left\{4 - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right\}} \right] \sin \frac{n\pi \theta_0}{\alpha}$$

(15)

(3). 連続扇形平板の解法について • はり理論における連続ばりの解法と同様、節線(フレームの節点に該当し単位板の接線線とする)での、

モーメントの釣り合い条件から、連続扇形平板を解くことができる。

いま、図-4(a)に示すごとく、節線*i*において、 α (*j*-1)番と α *j*番の扇形平板が連続しているものとし、節線近傍を取り出せば、端モーメント M_{j-1}, M_j が作用して釣り合い状態にある。(図-4(b)参照)

ところで、 M_{j-1}, M_j は、一般に式(10)に示される θ の函数で、 θ のいかなる値に関しても、換言すれば、節線上のいかなる点においても釣り合っていないなければならない。

すなわち

$$M_{j-1} + M_j = 0$$

(16)

式(10)の添字 1, 2 を *j*-1, *j* に置き換え、式(16)に代入して整理すれば、結局次の条件式をうる。

$$Mr_{j-1} + Mr_j = 0$$

(17)

式(17)が、はり理論における節点モーメントの釣り合い条件式に相当するもので、本式を各節線において求め連立に解くことにより、本題の連続扇形平板が解けることとなる。

3. むすび 本論文の適用は 2. (2) で述べたごとく、任意垂直荷重が少くとも r 方向において連続である場合に限定されるが、除外した集中荷重および θ 方向に展開する線荷重の場合には、K. Goryunp⁽¹⁾ あるいは芳村氏の論文⁽¹⁾ に示される手法を拡張すれば、連続扇形平板を解くことも可能と考えられる。また本論文では等方性等断面の一方向連続扇形平板が、いわゆるたわみ角式に相当する式を用いて解きうることを示したが、さらに本法によれば、モーメント分配法やカーニー法、その他機械的計算法などを、はりの場合と同様に扇形平板に適用することも可能となるのみならず、本法の応用として、一方向連続直交異方性扇形平板はもちろんのこと、扇形平板と曲面板の組み合わせた、板ラーメン構造物の解析も可能となり、これらについては逐次発表の予定である。

参考文献

- (1) 芳村 仁：曲線直交異方性扇形平板の曲げについて、土木学会論文集 82号(1962年)
曲線直交異方性変厚扇形平板の曲げについて、土木学会論文集 86号(1962年) 88号(1963年)
- (2) K. Goryunp(独)：Die dreiseitig gelagerte Reckteckplatte INGENIEUR-ARCHIV (1947年)